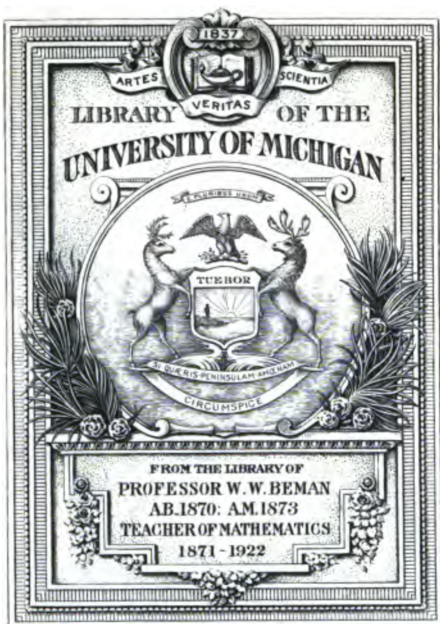

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB.1870: AM.1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922

MANUALI HOEPLI

ALGEBRA

ELEMENTARE

PER

S. PINCHERLE

Prof. di Algebra e Geometria analitica nella R. Università
di Bologna.

CON 2 INCISIONI NEL TESTO

QUINTA EDIZIONE



ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

1894

W. W. Beman
gt.
6-23-1923

MILANO — TIP. LOMBARDI
7, FIORI OSCURI 7.

AVVERTENZA

Nel presente Manuale, destinato ai giovani che frequentano i corsi classici e pei quali la Matematica altro non è che complemento di coltura e ginnastica intellettuale, si è cercato di esporre con chiarezza e stretto rigore quelle teorie che costituiscono l'Algebra veramente elementare. Quest'opera ci sembra possa bastare a quegli alunni che si dedicano ad altri studi, mentre per quelli che intendono darsi agli studi matematici, essa può essere una preparazione alla lettura dei libri più completi del Bertrand, del Baltzer o dell'Arzelà.

INDICE

PARTE PRIMA

Aritmetica generale o calcolo algebrico.

PARTE SECONDA

Equazioni di primo e di secondo grado.

SEZIONE I.

Teoria delle equazioni di primo grado.

SEZIONE II.

Teoria delle equazioni di secondo grado.

PARTE TERZA

Progressioni e Logaritmi.

INTRODUZIONE

1. Quantità o grandezza, misura, unità, numero; varie specie di numeri. Si chiama *quantità* o *grandezza* tutto ciò che può essere oggetto di aumento, diminuzione e confronto.

Per *misurare* una quantità si sceglie una quantità *omogenea* e che si suppone ben conosciuta come termine di confronto; la quantità così scelta si dice *unità,* e si determina quante volte l'unità e le sue parti sono contenute nella grandezza da misurare: il risultato della misura si esprime con un *numero.*

Il *numero* è dunque l'espressione del risultato di una misura.

Se una quantità si compone di parti naturalmente separate e che concorrono in egual modo a formare la quantità, una di queste parti si prende per unità e l'operazione del *misurare* si riduce in questo caso a quella del *contare.* Il risultato si esprime ugualmente con un numero.

La misura può condurre a tre specie di numeri, secondo che si presenta l'uno o l'altro dei seguenti casi.

1.° Può accadere che la quantità da misurarsi contenga un numero esatto di volte l'unità; in tal caso la misura è espressa da un *numero intero.*

2.° Può darsi che la quantità da misurarsi non contenga esattamente un certo numero di volte l'unità, ma che dividendo l'unità in parti eguali (*parti aliquote*), la quantità contenga un numero esatto di volte alcune di queste parti; in tal caso la misura è espressa da un *numero frazionario.*

3.° Può darsi infine che per piccole che si facciano le parte aliquote dell'unità, queste parti non siano mai contenute esattamente nella quantità da misurarsi; in tal caso la misura è espressa da un *numero incommensurabile,* che non si può valutare che per approssimazione in unità e parti aliquote dell'unità.

In ciò che segue ammetteremo che il lettore abbia già imparate dall'Aritmetica ordinaria le regole della composizione e scomposizione dei numeri interi e frazionari, regole che costituiscono il *Calcolo aritmetico:* che sappia come il risultato delle operazioni elementari ivi studiate si esprima sempre con numeri interi o frazionari, ad eccezione delle estrazioni di radice che possono dare origine a numeri incommensurabili; infine che abbia visto come le definizioni e le proprietà delle operazioni elementari si possono estendere anche ai numeri incommensurabili (1).

(1) Per una teoria completa di questi numeri v. *Analisi Algebrica,* Cap. II. (Manuale Hoepli CXLI, Milano 1893).

2. Divisioni dell'algebra in due parti. L'Algebra si divide in due parti. La prima, detta *Calcolo Algebrico*, od anche Aritmetica Generale, ha per oggetto di insegnare a comporre e scomporre i numeri, ma le sue regole si applicano a numeri qualunque che si rappresentano con lettere, mentre le regole del calcolo aritmetico o conteggio si applicano a numeri espliciti. Così per esempio le regole della moltiplicazione algebrica non ci condurranno ad eseguire compiutamente le operazioni, ma a certe riduzioni che varranno per tutte le moltiplicazioni di una data specie. La seconda parte, che è l'Algebra propriamente detta, ha per oggetto la risoluzione delle *equazioni*, cioè dà regole per le quali si possono trovare certe quantità *incognite* quando fra queste ed altre quantità *date* passano delle relazioni conosciute.

3. Primi esempi di formule algebriche. Già nell'Aritmetica si hanno esempi di lettere adoperate a rappresentare numeri qualunque.

Per esempio, si dimostra in Aritmetica il seguente Teorema, che vale per numeri qualunque:

« *Il quadrato di una somma composta di due parti consta del quadrato della prima parte, più il doppio prodotto dalla prima per la seconda, più il quadrato della seconda parte.* » E questo teorema si può esprimere colla scrittura

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2;$$

tale scrittura, che si chiama *formola algebrica*,

dà un esempio del linguaggio algebrico mediante il quale si esprime senza alcuna ambiguità tutto ciò che è enunciato in molte parole del teorema precedente.

Un secondo esempio ci sarà dato dal seguente problema: « Qual'è l'interesse semplice dato da un capitale di A lire, posto a frutto ad un dato saggio per un dato numero di anni? »

Per rispondere a tale domanda si indichi con i % il saggio dell'interesse, con t il numero di anni, con I l'interesse cercato: si potrà ragionare nel seguente modo:

Se L. 100 messe a frutto per 1 anno dànno L. i
» » 1 » » » darà la centesima parte, cioè $\frac{i}{100}$
» » A » darà A volte tanto o $\frac{i \times A}{100}$
» » A » t anni darà t volte tanto ssia $\frac{i \times A \times t}{100}$

L'interesse cercato è dunque dato dalla *formola*

$$I = \frac{i \times A \times t}{100}$$

che espressa in parole, si traduce nella seguente regola:

« *Per trovare l'interesse semplice di una data*

somma messa a frutto ad una data tassa e per un dato numero di anni, si moltiplica il capitale per la tassa e per il tempo e si divide per 100. »

Ecco un ultimo esempio.

« Un operaio fa un lavoro in a giorni, un altro fa lo stesso lavoro in b giorni; in quanto tempo ultimeranno quel lavoro adoperandovisi insieme? »

Si ragiona come segue:

Se il primo operaio fa il lavoro in a giorni, esso farà in 1 giorno $\frac{1}{a}$ del lavoro.

Se il secondo operaio fa il lavoro in b giorni, esso farà in 1 giorno $\frac{1}{b}$ del lavoro.

Lavorando insieme, essi faranno in 1 giorno $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ del lavoro, cioè $\frac{a+b}{a\times b}$ e se fanno $\frac{a+b}{a\times b}$ del lavoro in 1 giorno ultimeranno il lavoro in $1:\frac{a+b}{a\times b}$, ossia in $\frac{a\times b}{a+b}$ giorni. Si ha così una formola che dà una regola generale per tutti i problemi della stessa natura; la quale regola *generalizzata* convenientemente si può enunciare:

« *Se due cause il cui effetto sia proporzionale al tempo, agendo separate producono un certo effetto in due tempi* a *e* b *rispettivamente, le due cause agendo insieme produrranno quell'effetto in un tempo che sarà dato dal prodotto dei due tempi* a *e* b, *diviso per la loro somma.* »

4. Definizione dei segni e dei vocaboli impiegati in algebra; espressioni, termini, segni,

MONOMI, POLINOMI. Come in Aritmetica, i segni adoperati a denotare le varie operazioni sono:

$$=,\ +,\ -,\ \times,\ :,\ \sqrt{}$$

di cui è noto il significato, inoltre

$>$ che si legge *maggior di*
$<$ » » » *minore di.*

Una combinazione di più lettere o numeri legati coi segni delle operazioni è un'*espressione* algebrica; così sono espressioni algebriche;

$$\frac{a \times i \times t}{100},\ a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

Il segno $\times$ si omette per lo più fra due lettere, o fra un numero ed una lettera; talchè in luogo di

$$\frac{a \times i \times t}{100},\ 2 \times a \times b$$

si scrive

$$\frac{ait}{100},\quad 2ab$$

La parola *segno* si suole attribuire in modo speciale ai segni dell'addizione (+) e della sottrazione (—). Quando un'espressione non ha alcun segno + o —, si deve sottintendere dinanzi ad essa il segno +.

Si chiama *termine* ogni insieme di lettere e numeri contenenti un solo segno + o —; il

segno + può essere anche sottinteso. Le espressioni formate da un solo termine, come

$$\frac{ait}{100}, \quad 2ab$$

si dicono *monomi;* e *polinomi* sono le espressioni che contengono vari termini, come

$$a + b, \; a^2 + 2ab + b^2.$$

Un polinomio a 2, 3 termini si dice *binomio, trinomio.*

5. Espressioni intere, fratte, razionali ed irrazionali. Una espressione che non contiene denominatori, o che contiene nel denominatore soli numeri si dice *espressione intera;* un'espressione che contiene lettere nel denominatore è un'espressione fratta. Così:

$$ab, \quad \frac{a+b}{2}$$

sono espressioni intere,

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a^2+b^2}{a-b}$$

sono espressioni fratte.

La radice m^{sima} di un numero a è quel numero che innalzato all'm^{sima} potenza produce a; essa si indica con

$$\sqrt[m]{a};$$

il numero m si dice *indice* della radice, e il segno $\sqrt{}$ si dice *radicale*. Così

$$\sqrt[5]{3125} = 5, \quad \sqrt[4]{2401} = 7,$$

perchè

$$5^5 = 3125, \quad 7^4 = 2401.$$

Una espressione algebrica si dice *razionale* quando non contiene segni radicali o contiene soli numeri sotto i radicali. Così

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b}, \quad \sqrt{2}\,a + 5\,b$$

sono espressioni razionali. Un'espressione dicesi *irrazionale* quando contiene lettere sotto il radicale. Così

$$\sqrt{a}, \quad \frac{1 + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$$

sono espressioni irrazionali.

6. Parti di un monomio: grado, segno, coefficienti, esponenti. In un monomio si distinguono:

a) il *segno*, che è $+$ o $-$; il segno $+$ può essere sottinteso.

b) il *coefficiente:* questo numero, primitivamente intero, precede il monomio ed indica quante volte esso va ripetuto. Però per generalità si sono detti coefficienti i fattori numerici sia interi che frazionari od incommensurabili di un monomio. Esempio:

$$4\,a^2\,b^2$$

ha per coefficiente 4, che indica che l'espressione $a^2 b^2$ va presa 4 volte: le espressioni

$$\sqrt{2}\, a, \quad \frac{5}{7} a b$$

sono monomi aventi per coefficienti $\sqrt{2}$ e $\frac{5}{7}$.

c) le lettere che compariscono nel monomio;

d) gli esponenti che possono essere attribuiti a ciascuna lettera: come è noto dall'Aritmetica,

$$a^m$$

significa un prodotto di m fattori uguali ad a;

e) il *grado* del monomio; ossia la *somma* degli esponenti delle sue lettere: se una lettera non ha esponente va sottinteso l'esponente 1. Così

$$5\, a^2 b^2 c$$

è un monomio del 6.° grado.

7. Grado di un polinomio. — Polinomio ordinato e lettera ordinatrice. — Polinomi omogenei. — Termini simili. — Valore di un'espressione algebrica. Ciascuno dei termini che compongono un polinomio ha il suo grado. Il *massimo* di questi gradi dà il grado del polinomio. Così il polinomio

$$5\, a b + 2\, a^3 b - 4\, a^2 b^3$$

è del 5.° grado.

Un polinomio, in cui tutti i termini sono dello stesso grado, si dice *omogeneo.*

Quando i termini di un polinomio contengono una stessa lettera e si succedono in modo che

gli esponenti di questa lettera vadano gradatamente crescendo o decrescendo, il polinomio dicesi *ordinato* in ordine crescente o decrescente rispetto a quella lettera, e la lettera stessa si chiama *ordinatrice*. Così

$$4a + 9a^2 - 15a^3 + 7a^4$$
$$ax^2 + bx + c$$

sono polinomi ordinati: il primo in ordine crescente rispetto alla lettera ordinatrice a, il secondo in ordine decrescente rispetto alla lettera x.

Si dicono *termini simili* quelle che contengono le stesse lettere, ciascuna cogli stessi esponenti; essi possono differire nel coefficiente e nel segno: così

$$-5a^2b^3, +7a^2b^3$$

sono simili, e invece

$$3ab^2, 3ab^3$$

non lo sono.

Il *valore numerico* di un'espressione algebrica si ottiene sostituendo alle lettere che vi entrano numeri speciali ed eseguendo le operazioni indicate.

Così il valore di

$$\frac{a^2 + b^3}{a + b}$$

per $a = 10$, $b = 3$ è $\frac{109}{7}$; così il valore di

$$ab^2 - ba^2$$

per $a = 3$, $b = 2$ non si può esprimere per ora, perchè si giunge ad una sottrazione impossibile.

PARTE PRIMA

ARITMETICA GENERALE O CALCOLO ALGEBRICO

CAPITOLO I.

Addizione e Sottrazione.

8. Oggetto dell'addizione. — Oggetto della sottrazione. L'*addizione* è un'operazione che ha per oggetto di riunire in un numero solo tutte le unità e parti di unità contenute in vari numeri ([1]). Questi numeri possono essere qualunque e si rappresenteranno con lettere in ciò che segue, e:

« Addizionare più espressioni letterali significherà trovare una nuova espressione tale che, qualunque siano i numeri che si sostituiscono alle lettere, il *valore* della nuova espressione sia uguale alla somma dei valori delle espressioni primitive. »

---

(1) Non insistiamo qui sulla estensione di questa definizione ai numeri incommensurabili. La stessa osservazione valga anche per le altre operazioni fondamentali. V. il citato Manuale d'*Analisi algebrica.*

La *sottrazione* è un'operazione che ha per oggetto di trovare l'altra parte di una somma conosciuta e di cui è conosciuta pure una parte. In altre parole:

« Date due espressioni, la sottrazione ha per oggetto di trovare una terza (*differenza*) che aggiunta alla seconda (*sottraendo*) riproduca la prima (*diminuendo*). »

Questa definizione si compendia nella scrittura:

$$\text{differenza} + \text{sottraendo} = \text{diminuendo}.$$

9. Addizione e sottrazione dei monomi. Riduzione dei termini simili. Per sommare o sottrarre due monomi non si fa altro che separarli col segno + o —.

Così il risultato dell'addizione di a e b è $a + b$; il risultato della sottrazione degli stessi numeri è $a - b$.

Se però i monomi da sommare o da sottrarre sono *simili* (7) essi si possono ridurre.

Sia infatti da sommare

$$10\,a^2\,b^3 \text{ e } 2\,a^2\,b^3,$$

si può dire che $10\,a^2\,b^3$ significa:

« l'espressione $a^2\,b^3$ presa 10 volte »,

così $2\,a^2\,b^3$ significa:

« l'espressione $a^2\,b^3$ presa 2 volte, »

e dovendole *riunire* si avrà l'espressione $a^2\,b^3$ presa 12 volte, cioè:

$$10\,a^2\,b^3 + 2\,a^2\,b^3 = 12\,a^2\,b^3.$$

Similmente

$$9\,a\,x^2 - 4\,a\,x^2 = 5\,a\,x^2.$$

Il ragionamento precedente non si potrebbe fare per termini non simili, perchè non si possono sommare o sottrarre quantità di diversa specie. L'operazione indicata precedentemente si chiama *riduzione dei termini simili.* Eccone altri esempi:

$$2\,a^3\,b + 5\,a^3\,b - 4\,a^3\,b = 3\,a^3\,b,$$

$$\frac{1}{20}\,a^2\,x - \frac{1}{25}\,a^2\,x + \frac{7}{50}\,a^2\,x = 0{,}15\,a^2\,x,$$

$$a^2\,x^3 + \sqrt{2}\,a^2\,x^3 = (1 + \sqrt{2})\,a^2\,x^3 \quad (^1).$$

10. ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DEI POLINOMI. *Regola I.* « Per addizionare due polimoni si scrivono i termini del secondo dopo i termini del primo. »

Dimostrazione. Sia da sommare il polinomio $a - b + c$ col polinomio $d - e + f$, il che si *indica* con

$$(a - b + c) + (d - e + f).$$

Il polinomio $d - e + f$ ci indica che i numeri che si porranno in luogo delle lettere d e f saranno da aggiungersi, mentre il numero e sarà da togliersi, per cui il risultato sarà

$$a - b + c + d + f - e.$$

---

(1) Si usa la parentesi per indicare che una certa operazione porta su tutti i termini racchiusi entre essa parentesi, come se fossero un numero solo.

Ma il numero delle unità del risultato rimane il medesimo in qualunque ordine si aggiungano o si tolgano le unità dei singoli termini, il che si esprime dicendo che il valore di un polinomio non si altera cambiando di posto i suoi termini, e perciò il risultato sarà

$$a - b + c + d - e + f$$

che si è ottenuto scrivendo il secondo polinomio al séguito del primo, c. d. d.

Regola II. « Per sottrarre due polinomi si scrivono i termini del secondo, cambiati di segno, al séguito del primo. »

Dimostrazione. Sia da sottrarre dal polinomio $a - b + c$ il polinomio $d - e + f$, il che si *indica* con

$$(a - b + c) - (d - e + f):$$

dico che il risultato sarà

$$a - b + c - d + e - f.$$

Infatti, se questo è il risultato, aggiungendovi il sottraendo, si deve ritrovare il diminuendo

$$a - b + c.$$

Ora aggiungendo $d - e + f$ colla regola I, si trova

$$a - b + c - d + e - f + d - e + f;$$

ma in forza della riduzione dei termini simili, $-d$ e $+d$, $+f$ e $-f$, $+e$ e $-e$ si distruggono

e rimane

$$a - b + c$$

come si doveva trovare.

Osservazione. Ogniqualvolta il risultato d'una addizione o sottrazione algebrica contiene termini simili, questi vanno *ridotti* come abbiamo indicato.

Esempio: Sia da sottrarre

$$12\,a\,b^3 + 5\,a^2\,b^2 - 9\,a^3\,b$$

da

$$11\,a^3\,b + 20\,a^2\,b^2 + 7\,a\,b^3.$$

L'operazione si indica con

$$11\,a^3\,b + 20\,a^2\,b^2 + 7\,a\,b^3 - (12\,a\,b^3 + 5\,a^2\,b^2 - 9\,a^3\,b)$$

ed eseguendola colla regola II,

$$11\,a^3\,b + 20\,a^2\,b^2 + 7\,a\,b^3 - 12\,a\,b^3 - 5\,a^2\,b^2 + 9\,a^3\,b$$

ma riducendo i termini simili:

$11\,a^3\,b + 9\,a^3\,b$ dànno $20\,a^3\,b$
$20\,a^2b^2 - 5\,a^2\,b^2$ » $15\,a^2\,b^2$

e viene

$$20\,a^3\,b + 15\,a^2\,b^2 + 7\,a\,b^3 - 12\,a\,b^3.$$

I due ultimi termini sono simili, ma non si possono ridurre (per ora) perchè 12 non si può sottrarre da 7.

CAPITOLO II.

I numeri negativi.

11. Sottrazioni aritmeticamente impossibili. Se dal numero a si vuol sottrarre il numero b, l'operazione si indica con

$$a - b$$

dove a e b stanno a rappresentare numeri qualunque. Ma quando in luogo di a e b noi porremo effettivamente due numeri particolari, l'operazione non sarà possibile che se $a > b$ o se $a = b$. Per esempio ponendo $a = 8$, $b = 11$, la sottrazione

$$8 - 11$$

sarebbe aritmeticamente impossibile.

Però nell'Algebra, allo scopo di dare alle regole ed ai risultati la massima generalità e di schivare le eccezioni, si procura mercè l'introduzione di nuove specie di numeri opportunamente definite, di rendere possibili anche quelle operazioni che non sono eseguibili coi numeri definiti precedentemente: così le sottrazioni aritmeticamente ineseguibili si rendono possibili allargando il campo dei numeri e precisamente mercè l'introduzione dei *numeri negativi*.

12. I numeri negativi; principii relativi. La introduzione di questi numeri si fonda sui seguenti principii:

a) La serie dei numeri naturali che nell'Aritmetica incomincia collo zero

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

si può continuare anche al di là dello zero, con numeri preceduti dal segno — e che si diranno *negativi*; talchè la serie dei numeri interi sarà

$$\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

b) D'ora in poi i segni + e — anzichè segni di operazioni, si riguarderanno come *appartenenti* al numero che precedono (il segno + ordinariamente è sottinteso) e come equivalenti delle parole *unità da aggiungere, unità da togliere.* Così la sottrazione

$$11 - 8$$

si potrà riguardare come la riunione dei due numeri

$$+11, -8$$

ossia

11 unità da aggiungere e
8 unità da togliere.

S'intenda da aggiungersi o da togliersi a qualsiasi numero che potrebbe precedere.

c) Terzo principio è il seguente: ogni unità negativa *annulla* o distrugge una unità positiva: ossia

+1 e —1 insieme dànno 0

per cui anche, per esempio

+45 e —45 insieme daranno 0.

A questi numeri si può dare un significato concreto: per esempio possiamo riguardare i numeri rappresentanti

X —5 —4 —3 —2 —1 0 1 2 3 4 5 Y

lunghezza di 1, 2, 3,... metri contati sopra una retta indefinita a partire da un punto fisso 0; ora le lunghezze possono contarsi a destra o a sinistra del punto 0: per distinguerle si potranno riguardare le lunghezze contate a destra come rappresentate da numeri ordinari o *positivi*, e quelle contate a sinistra come rappresentate dai nuovi numeri *negativi*.

13. Operazioni sui numeri negativi. Con questi principî si rendono possibili tutte le sottrazioni. Abbiasi per esempio l'operazione

$$8 - 11.$$

Per il principio *b*) si riguarderà questa operazione come formata dall'aggregato di

$$+8 \text{ e } -11,$$

cioè di

8 unità da aggiungere,
11 » da togliere.

Ma per il principio *c*) 8 unità da aggiungere distruggono 8 unità da togliere, e rimangono 3 unità da togliere, talchè

$$8 - 11 = -3.$$

L'operazione

$$-11 + 8$$

non differisce evidentemente dalla precedente.

L'operazione

$$11 + (-8)$$

che significa:

« riunione di 11 unità da aggiungere con 8 unità da togliere, »

non differisce pure dalla precedente.

L'operazione

$$11 - (-8)$$

significa invece: trovare quel numero che *aggiunto a* (-8) dia 11, cioè da cui *sottratto* 8 rimanga 11: e questo sarà

$$11 + 8 = 19.$$

Si esprime quest'ultimo risultato dicendo:

« che sottrarre un numero negativo equivale ad aggiungere lo stesso numero preso come positivo. »

14. Riassumendo, si possono enunciare le seguenti regole di addizione e sottrazione dei numeri negativi:

I. « Per eseguire una sottrazione qualunque si leva dal numero maggiore il minore, dando al risultato il segno del maggiore »: così

$$11 - 8 = 3,\quad 8 - 11 = -3.$$

II. « Per sommare un numero negativo si sottrae lo stesso numero preso positivamente: » così

$$11 + (-8) = 11 - 8 = 3.$$

III. « Per sottrarre un numero negativo si addiziona lo stesso numero preso positivamente »: così

$$11-(-8)=11+8=19.$$

Queste due regole si possono esprimere colle formole:

$$a+(-b)=a-b, \quad a-(-b)=a+b.$$

15. *Osservazioni.* La regola I si applica anche alla riduzione dei termini simili: per esempio

$$7\,a\,b^3-12\,a\,b^3$$

significa

$a\,b^3$ da aggiungere 7 volte e
» da sottrarre 12 volte,

cioè in complesso da sottrarre 5 volte, ossia

$$7\,a\,b^3-12\,a\,b^3=-5\,a\,b^3.$$

Così la sottrazione data come esempio al § 10, dà per risultato

$$20\,a^3\,b+15\,a^2\,b^2-5\,a\,b^3.$$

16. SUL SIGNIFICATO CONCRETO DEI NUMERI NEGATIVI. Circa al significato concreto da attribuirsi ai numeri negativi si può dire che:

« Quando una grandezza è suscettibile di essere misurata in due sensi opposti, se il numero positivo serve a misurare la grandezza in uno dei due sensi, il numero negativo serve a misurarla nel senso opposto. »

Esempi di grandezze suscettibili di misura in due sensi o direzioni opposte sono:

tempo: in passato o in avvenire; moto: a destra o a sinistra, verso l'alto o verso il basso; forze: accelerazione o rallentamento, repulsione od attrazione:

somme di denaro: guadagno o perdita, credito o debito;

lunghezze contate sopra una retta: a destra o a sinistra di un dato punto.

Così: se + 5 ore significa *fra* 5 *ore*, — 5 ore significherà 5 *ore fa.*

Così: se una persona ha 1200 lire di credito e 800 di debito la sua sostanza sarà di 400 lire; se ha 1200 lire di debito e 800 di credito, la sua sostanza sarà di — 400 lire, cioè sarà in debito di 400 lire.

Il numero negativo si dice *minore di zero* e tanto più piccolo quanto più grande è il suo valore assoluto (cioè astrazion fatta dal segno). Ciò verrà spiegato con maggior precisione in seguito (§ 92); ma intanto si osservi che chi ha nulla è più ricco di chi ha 400 lire di debito: chi ha 400 lire di debito è più ricco di chi deve 1000 lire Questo esempio, benchè assai volgare, vale però a chiarire il concetto di grandezza relativa dei numeri negativi.

CAPITOLO III.

Moltiplicazione.

17. Definizione generale. « La moltiplicazione è una operazione che ha per oggetto, dati due numeri a e b, a detto *moltiplicando* e b *moltiplicatore*, di trovare un terzo numero detto *prodotto*, che sia formato col moltiplicando come il moltiplicatore è formato coll'unità. »

Per intendere chiaramente questa definizione, conviene osservare che ogni *numero* è formato coll'unità. Così

5 è formato prendendo l'unità 5 volte;

$\frac{7}{3}$ è formato prendendo l'unità due volte, più un terzo della unità;

$\sqrt{2} = 1{,}4142....$ è formato prendendo l'unità, più $\frac{4}{10}$ dell'unità, più $\frac{1}{100}$ dell'unità, più $\frac{4}{1000}$ dell'unità, più, ecc.

In virtù della definizione precedente:

$a \times 5$ sarà 5 volte a;

$a \times \frac{7}{3}$ sarà a due volte più $\frac{1}{3}$ di a;

$a \cdot \sqrt{2} = a \times 1{,}414....$ sarà a preso una volta più $\frac{4}{10}$ di a, più $\frac{1}{100}$ di a, più $\frac{4}{1000}$ di a, ecc.

Il prodotto dei due numeri a e b si indica con $a \times b$, con $a.\,b$ ed anche con $a\,b$.

18. Moltiplicazione dei monomi. In un monomio abbiamo distinto vari elementi; segno, coefficiente, lettere, esponenti: converrà dare regole separate e speciali per ciascun di essi:

a) In quanto ai segni si possono presentare quattro diverse combinazioni:

1.° un monomio positivo $\times$ per un m. positivo;

2.° un monomio positivo $\times$ per un m. negativo;

3.° un monomio negativo $\times$ per un m. positivo;

4.° un monomio negativo $\times$ per un m. negativo; i quali quattro casi si possono indicare per brevità con:

$$+ \times +$$
$$+ \times -$$
$$- \times +$$
$$- \times -$$

e si tratta di trovare in questi quattro casi quale sarà il segno del prodotto.

1.° Se si ha $+ \times +$, si deve per la definizione generale trovare un numero che sia composto col moltiplicando come il moltiplicatore è composto coll'unità. Ma l'unità è assolutamente positiva $(+1)$, e il moltiplicatore è dello stesso segno, perchè è $+$: dunque il prodotto sarà del segno del moltiplicando, ma il moltiplicando è $+$, dunque il prodotto sarà $+$.

2.° Se si ha $- \times +$, lo stesso ragionamento dimostra che il prodotto sarà negativo.

3.° Sia ora $+ \times -$: il prodotto deve essere rispetto al moltiplicando come il moltiplicatore è rispetto all'unità, ma il moltiplicatore è di segno contrario all'unità, dunque il prodotto sarà di segno contrario al moltiplicando: questo è $+$, dunque il prodotto sarà $-$.

4.° Lo stesso ragionamento fatto nel 3.° caso dimostra che avendosi $- \times -$, il risultato sarà $+$.

Questi risultati si riassumono nella seguente regola, detta *regola dei segni* della moltiplicazione:

Regola:	$+$	moltiplicato	per	$+$	dà	$+$
	$+$	»	»	$-$	»	$-$
	$-$	»	»	$+$	»	$-$
	$-$	»	»	$-$	»	$+$

o anche

« un prodotto di due fattori dello stesso segno è sempre positivo: un prodotto di due fattori di segno contrario è sempre negativo. »

b) Siano da moltiplicare due monomi, potenze di una stessa lettera; $a^m \times a^n$.

Sappiamo che

a^m	significa	a....	preso	m	volte come	fattore;
a^n	»	a....	»	n	» »	»

il prodotto

$$a^m \times a^n$$

conterrà dunque $m + n$ volte il fattore a, e quindi

sarà a^{m+n}: abbiamo così la formola

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

che enunciata in parole, equivale alla seguente:

Regola. « Per moltiplicare due potenze di una stessa lettera si innalza la lettera ad una potenza indicata dalla somma degli esponenti. »

c) Ricordando poi il teorema d'Aritmetica, che per moltiplicare un prodotto per un altro basta moltiplicare il primo successivamente per tutti i fattori del secondo (¹) si vede che bisogna moltiplicare fra di loro i due coefficienti ed *indicare* senz'altro la moltiplicazione per le lettere non comuni: si ha cioè la seguente regola generale:

Regola. « Per moltiplicare due monomi si osserva la regola dei segni, si moltiplicano i coefficienti, si sommano gli esponenti delle lettere comuni e si scrivono di seguito le lettere non comuni. »

Esempi: Sia

$$4\, a^3 b^2 c \times 9\, a^4 c^3 d.$$

Il prodotto è

$$36.\, a^7 c^4 b^2 d.$$

Sia

$$\frac{2}{3} a\, b^9 \times \left(-\frac{1}{5} a^3 b^{11}\right).$$

Il prodotto è

$$-\frac{2}{15} a^4 b^{20}.$$

(¹) Legge associativa della moltiplicazione.

19. Moltiplicazione di un polimonio per un monomio. La moltiplicazione di un polinomio per un monomio si fonda sul noto principio dell'aritmetica [1]: « che per moltiplicare una somma per un numero basta moltiplicare tutte le parti della somma per il numero. »

Avendosi dunque un polinomio da moltiplicare per un monomio, si moltiplicheranno tutti i termini del polinomio successivamente per il monomio; i termini del polinomio essendo tutti monomi, si avranno da fare tante moltiplicazioni appartenenti tutte al caso precedente.

Sia ad esempio

$$(2\,a\,b + 3\,a^2 - b\,c)\ (-5\,a^2\,b^2)$$

che è l'*indicazione* della moltiplicazione di

$$2\,a\,b + 3\,a^2 - b\,c$$

per

$$-5\,a^2\,b^2;$$

si avranno da sommare i risultati delle 3 moltiplicazioni del primo caso:

$$\begin{array}{r} 2\,a\,b.\,(-5\,a^2\,b^2) \\ 3\,a^2.\,(-5\,a^2\,b^2) \\ (-b\,c).(-5\,a^2\,b^2) \end{array}$$

ed eseguendo:

$$-10\,a^3\,b^3 - 15\,a^4\,b^2 + 5\,a^2\,b^3\,c.$$

(1) Legge distributiva della moltiplicazione.

Essendo dimostrato in generale dall'Aritmetica che si può in qualsiasi moltiplicazione alterare l'ordine dei fattori senza che venga alterato il prodotto (1), si ridurrà la moltiplicazione di un monomio per un polinomio alla moltiplicazione di un polinomio per un monomio.

Avviene talvolta che occorre di sostituire ad una moltiplicazione del 2.° caso *eseguita* la stessa moltiplicazione del 2.° caso *indicata;* questa sostituzione, frequentissima nella pratica del calcolo algebrico, chiamasi « raccoglimento dei fattori comuni. »

Cosi nel polimonio

$$a^2 b - a b c^2 + a^3 b^2 \qquad (1)$$

si trova in tutti i termini il fattore $a\,b$, cioè il polimonio dato è il prodotto del polinomio

$$a - c^2 + a^2 b$$

per $a\,b$, e si può sostituire alla operazione (1) eseguita, l'operazione stessa indicata:

$$a\,b\,(a - c^2 + a^2 b).$$

Cosi nel polinomio

$$4\,a^3 + 5\,a^2 + 2\,a$$

si scorge in tutti i termini il fattore a, e *raccogliendo*:

$$a\,(4\,a^2 + 5\,a + 2).$$

---

(1) Legge commutativa della moltiplicazione.

20. Moltiplicazione di due polinomi. *Regola* « Per moltiplicare due polinomi, si moltiplicano tutti i termini del moltiplicando successivamente per ogni termine del moltiplicatore. »

Dimostrazione. Abbiasi da moltiplicare il polinomio

$$a - b + c$$

per

$$d - e + f,$$

l'operazione si indica con

$$(a - b + c)\ (d - e + f).$$

Riguardando per un momento il primo polinomio come una quantità che compendieremo colla lettera M, avremo la moltiplicazione

$$M\,(d - e + f)$$

che sappiamo eseguire: ed il risultato è

$$Md - Me + Mf$$

Ponendo per M la sua espressione $a - b + c$, avremo

$$(a - b + c)\,d - (a - b + c)\,e + (a - b + c)\,f,$$

che sono tante moltiplicazioni del caso precedente; eseguendolo, tenuto conto della regola per la sottrazione dei polinomi, si avrà

$$ad - bd + cd - ae + be - ce + af - bf + cf,$$

il che dimostra la regola enunciata.

La moltiplicazione di un numero qualunque di polinomi si farà moltiplicando il primo pel secondo, poi il risultato che è un nuovo polinomio, per il terzo, e così via.

21. Moltiplicazione dei polinomi ordinati. Il prodotto della moltiplicazione dei polinomi si può semplificare quando i fattori sono polinomi ordinati per le potenze crescenti o decrescenti di una stessa lettera; infatti esso può contenere molti termini simili che si riducono fra loro.

Nella pratica si sogliono scrivere in linee orizzontali i vari prodotti parziali ottenuti moltiplicando il primo fattore successivamente per i singoli termini dell'altro; questi prodotti parziali si scrivono in guisa che i termini simili siano posti in colonne verticali: quindi si scrive il prodotto totale dopo fatta la riduzione dei termini simili. Esempio:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 8x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 4x + 7 & & & \\
 & & & 7x^3 - 3x^2 + 9x & & & \\
\hline
56x^7 & -35x^6 & +14x^5 & -28x^4 & +49x^3 & & \\
 & -24x^6 & +15x^5 & -6x^4 & +12x^3 & -21x^2 & \\
 & & 72x^5 & -45x^4 & +18x^3 & -36x^2 & +63x \\
\hline
56x^7 & -59x^6 & +101x^5 & -79x^4 & +79x^3 & -57x^2 & +63x.
\end{array}$$

Talvolta le riduzione sono tali da fare sparire tutti i termini intermedi, rimanendo solo il primo e l'ultimo termine. Esempio:

$$\begin{array}{l}
x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
\qquad\qquad x - 1 \\
\hline
x^5 \qquad -
\end{array}$$

La prova della moltiplicazione si può fare coll'inversione dei fattori, come nell'Aritmetica.

Teorema. « Nella moltiplicazione dei polinomi ordinati, il primo e l'ultimo termine del prodotto provengono senza riduzione dai prodotti rispettivi dei 2 primi e dei 2 ultimi termini dei due fattori. »

Infatti nei prodotti parziali si riducono i termini simili, i quali sono dello stesso grado; ma il prodotto del primo termine del moltiplicando per il primo del moltiplicatore ha il grado massimo quando i polinomi sono ordinati in ordine crescente, minimo se ordinati in ordine decrescente: e il prodotto dell'ultimo termine del moltiplicando per l'ultimo del moltiplicatore è respettivamente del grado minimo, o massimo; essi quindi non si riducono con alcun altro termine del prodotto.

L'analogia che si manifesta fra la moltiplicazione dei polinomi ordinati e quella dei numeri interi si spiega quando si osservi che un numero intero si può riguardare come un polinomio ordinato per le potenze di dieci. Esempio

$$45392 = 40000 + 5000 + 300 + 90 + 2$$
$$= 4.10^4 + 5.10^3 + 3.10^2 + 9.10 + 2$$

ed esprime il valore del polinomio

$$4x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 9x + 2$$

per

$$x + 10.$$

22. Applicazioni della moltiplicazione. *a*) Si eseguisca la moltiplicazione

$$(a + b)\ (a + b):$$

si trova

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+a\,b \\ a\,b+b^2 \\ \hline a^2+2\,a\,b+b^2 \end{array}$$

risultato già noto dall'aritmetica, e che si esprime colla formola

$$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2.$$

b) Si moltiplichi il polinomio

$$a^2+2\,a\,b+b^2=(a+b)^2$$

per

$$a+b$$

e si trova

$$\begin{array}{r} a^2+2\,a\,b+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+3\,a^2\,b+a\,b^2 \\ a^2\,b+a\,b^2+b^3 \\ \hline a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3. \end{array}$$

cioè

$$(a+b)^3=a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3.$$

c) Si moltiplichi $a+b$ per $a-b$ e si avrà

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+a\,b \\ -a\,b-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

donde la formola notevole:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$$

che equivale al

Teorema: « Moltiplicando la somma di due numeri per la loro differenza si ottiene la differenza dei quadrati di questi numeri. »

Esempio:

$$(11 + 7)\ (11 - 7) = 11^2 - 7^2.$$

CAPITOLO IV.

Divisione.

23. Definizione generale. « La divisione è una operazione che ha per oggetto, dati due numeri a e b, di trovare un numero detto *quoziente* che moltiplicato per b riproduca a. »

Il numero a dicesi *dividendo,* il numero b si dice *divisore*: il quoziente si indica con $\frac{a}{b}$ e si chiama anche *frazione algebrica.* La definizione della divisione si può esprimere colla formola

$$\frac{a}{b} \times b = a.$$

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, come la sottrazione è l'operazione inversa della addizione.

24. Divisione dei monomi. Come nella moltipli-

cazione dei monomi, anche per la divisione dobbiamo dare le regole relative ai vari elementi che compongono un monomio.

a) Regola dei segni. Come per le moltiplicazioni, quattro sono le combinazioni che si possono presentare in quanto ai segni; esse si possono riassumere brevemente con

+	diviso	per	+
+	»	»	—
—	»	»	+
—	»	»	—

Nella prima combinazione, si deve trovare un segno che moltiplicato per + dia +, ma questo dalla regola dei segni, sappiamo essere il +. Così nella seconda combinazione, si deve trovare un segno che moltiplicato per — dia +, ma questo non può essere che —. Ragionando similmente negli altri casi, si giunge alla regola.

+	diviso	per +	dà	+
+	»	» —	»	—
—	»	» +	»	—
—	»	» —	»	+

che si può enunciare:

« Se il dividendo ed il divisore hanno lo stesso segno, il quoziente è positivo; se hanno segno contrario, il quoziente è negativo. »

b) Abbiansi da dividere due monomi che siano potenze di una stessa lettera: per esempio sia da dividere

$$a^8 \text{ per } a^3.$$

Bisogna trovare quella quantità che moltiplicata per a^3 dà a^8, e questa è a^5: perchè

$$a^5 \times a^3 = a^8.$$

In generale, avendosi da dividere

$$a^m \text{ per } a^n$$

e supposto $m > n$, il quoziente sarà

$$a^{m-n}$$

perchè si è visto (§ 18, *b*) che

$$a^{m-n} \times a^n = a^m.$$

Occorre che sia $m > n$ perchè nel caso diverso di $m \leq n$, l'applicazione della regola condurrebbe ad un esponente negativo o nullo, che per ora non ha alcun significato.

c) Dalle cose dette, e ricordando il principio dell'Aritmetica che per dividere un prodotto per un numero basta dividere uno dei suoi fattori, da cui risulta che si possono sopprimere le lettere (fattori) comuni al dividendo ed al divisore, segue la

Regola: « Per dividere due monomi, si tiene conto della regola dei segni, si dividono i coefficienti colle regole dell'Aritmetica, si sottraggono gli esponenti delle lettere eguali se l'esponente nel dividendo supera quello nel divisore, e si sopprimono i fattori comuni. »

Esempio. Abbiasi da dividere

$$24\, a^5\, b^6 \text{ per } -3\, a^2\, b^4,$$

Si indica con

$$\frac{24\, a^5\, b^6}{-3\, a^2\, b^4}$$

l'operazione, che eseguita colla regola precedente, dà

$$-8\, a^3\, b^2.$$

Così

$$\frac{-18\, a^4\, b^2\, c}{+21\, a^5\, b^3} = -\frac{6\, c}{7\, a\, b}.$$

Avendosi da dividere $8\,m$ per $5\,n$ non si può fare altro che indicare l'operazione mediante la *frazione algebrica:*

$$\frac{8\,m}{5\,n}.$$

Quando il risultato di una divisione può porsi sotto forma intera (§ 5) il dividendo si dice *divisibile* per il divisore. Così:

$$24\, a^5\, b^6$$

è divisibile per $-3\, a^2\, b^4$.

Quando un'espressione non è divisibile per un'altra, il quoziente si rappresenta sempre con una frazione algebrica.

25. Divisione di un polinomio per un monomio. Per dividere un polinomio per un monomio si dividono le varie parti del polinomio per il monomio. Così:

$$a + b - c$$

diviso per m, dà:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m};$$

infatti:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)m$$
$$=\frac{a\,m}{m}+\frac{b\,m}{m}-\frac{c\,m}{m}$$
$$=a+b-c.$$

In alcuni casi il quoziente risulta intero. Così:

$$\frac{3\,a^2\,b+42\,a\,b^2-18\,a\,b\,c}{3\,a\,b}$$
$$=a+14\,b-6\,c.$$

21. Divisione dei polinomi ordinati. Nella massima parte dei casi non si può eseguire la divisione di due polinomi e bisogna contentarsi di *indicarla* con una frazione algebrica. Così, avendosi da dividere $a+b$ per $m-n$, non si può fare altro che scrivere

$$\frac{a+b}{m-n}.$$

Ma quando il dividendo ed il divisore contengono una stessa lettera, si dirà che la divisione è possibile quando il quoziente si potrà esprimere mediante un polinomio intero contenente la stessa lettera. I polinomi da dividere sono solitamente ordinati per le potenze *crescenti* o *decrescenti* di quella lettera.

Teorema I. « Nella divisione di due polinomi ordinati per le potenze decrescenti di una stessa

lettera, e supponendo ordinato in ugual modo anche il quoziente, il primo termine del quoziente risulta senza riduzione dalla divisione del primo termine del dividendo per il primo termine del divisore. »

Dimostrazione. Infatti *per definizione* il quoziente moltiplicato per il divisore dà il dividendo; ma dalla moltiplicazione dei polinomi ordinati il primo termine del dividendo proviene *senza riduzione* dal primo termine del dividendo per il primo termine del quoziente (§ 21); perciò, dividendo il primo termine del dividendo per il primo del divisore si avrà il primo termine del quoziente.

Teorema II. « Se dal dividendo si sottrae il prodotto del divisore per il primo termine del quoziente, si otterrà un *dividendo parziale* che è generato dal prodotto del divisore per gli altri termini del quoziente.

Dimostrazione. Il dividendo è il prodotto del divisore per l'intero quoziente: se dal dividendo si toglie il prodotto del divisore per il primo termine del quoziente, ciò che rimane rappresenterà il prodotto del divisore per gli altri termini del quoziente in forza della legge distributiva (§ 19) della moltiplicazione.

In questi due teoremi si contiene tutta la teoria della divisione dei polinomi; essa si chiarirà meglio con un esempio.

Abbiasi a dividere

$$D = x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 1$$

per

$$d = x^2 + x - 1$$

Il primo termine del quoziente proviene dalla divisione del primo termine del dividendo per il primo termine del divisore; esso sarà dunque

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3.$$

Moltiplicando x^3 per il divisore, troviamo

$$x^5 + x^4 - x^3$$

e questo è il prodotto di d per il primo termine del quoziente; togliendolo da D, ciò che rimane sarà il prodotto di d per gli altri termini del quoziente. Togliendo da D il polinomio

$$x^5 + x^4 - x^3$$

colla regola della sottrazione dei polinomi, e riducendo i termini simili, si trova

$$5x^5 + 5x^3 - 4x^2 + x - 1.$$

Questo è un dividendo parziale, che diviso per d darà gli altri termini del quoziente, e per la stessa ragione di prima converrà dividere $5x^4$ per x^2. Si trova così $5x^2$, secondo termine del quoziente; moltiplicando il divisore per $5x^2$ e levando il risultato dal 1.° dividendo parziale, troviamo un nuovo dividendo parziale che è il prodotto della moltiplicazione del divisore per i rimanenti termini del quoziente; questo 2.° prodotto parziale ci servirà a trovare il terzo termine del quoziente; moltiplicando questo termine per il divisore e togliendo il prodotto del 2.° dividendo parziale, troviamo per resto zero, il che indica che si

sono trovati tutti i termini che compongono il quoziente.

L'operazione si dispone nel seguente modo:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 1 & x^2 + x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^5 - x^4 + x^3 & x^3 + 5x^2 + 2 \\
\cline{1-1}
\quad 5x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 1 & \\
\quad -5x^4 - 5x^3 + 5x^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad x^2 + x - 1 & \\
\qquad -x^2 + x - 1 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 0. &
\end{array}
$$

Per riprova, si moltiplica il divisore per il quoziente e si ritrova il dividendo.

$$
\begin{array}{r}
x^3 + 5x^2 + 1 \\
x^2 + x - 1 \\
\hline
x^5 + 5x^4 \qquad + x^2 \qquad\qquad \\
x^4 + 5x^3 \qquad + x \quad \\
- \quad x^3 - 5x^2 \qquad - 1 \\
\hline
x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 1.
\end{array}
$$

27. Del resto. L'operazione non termina sempre come nell'esempio precedente; il più delle volte succede che invece di trovare una differenza *nulla* nell'ultima sottrazione, si trova una differenza costituita da un polinomio di grado inferiore al divisore; allora la divisione non si può continuare, e quella ultima differenza si chiama *resto* dell'operazione.

Riguardando un numero intero come un polinomio ordinato per le potenze di 10, la divisione dei numeri interi presenta una notevole analogia colla divisione dei polinomi ordinati, quale l'abbiamo sviluppata.

28. Formola generale della divisione. Regola generale. Se indichiamo con

D . . . il dividendo
d . . . il divisore
q . . . il quoziente
r . . . il resto

si ha la seguente formola generale per la divisione

$$D = d \times q + r \qquad (A)$$

e l'altra equivalente

$$\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}. \qquad (B)$$

Quando vi è un resto la prova si fa moltiplicando il divisore per il quoziente ed aggiungendo il resto: si deve ritrovare il dividendo.

Riassumendo, la regola per la divisione dei polinomi ordinati è la seguente:

Regola. « Per trovare il quoziente della divisione di due polinomi ordinati rispetto alle potenze decrescenti della stessa lettera si divide il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore e si ha così il primo termine del quoziente. Si moltiplica il divisore per questo primo termine e si sottrae il prodotto del dividendo: si ottiene così un primo dividendo parziale sul quale si opera

come sul dividendo stesso e si trova il secondo termine del quozjente: e così di seguito finchè si giunge ad un resto zero o ad un dividendo parziale di grado inferiore al divisore: questo dividendo parziale ultimo porta il nome di *resto* dell'operazione.

29. Divisione dei polinomi ordinati per le potenze crescenti di una lettera. Nel modo stesso che si fa la divisione di due polinomi ordinati per le potenze decrescenti, si può anche fare la divisione di due polinomi ordinati per le potenze crescenti di una stessa lettera; quando la divisione non dà luogo a resto, il risultato riesce il medesimo che se i polinomi sono ordinati in ordine decrescente, salvo che il quoziente pure è ordinato in ordine crescente. Ma se la divisione non dà luogo ad un quoziente esatto, non si trova resto in questo caso, ed invece la divisione prosegue indefinitamente e gli esponenti nel quoziente vanno aumentando continuamente. Eccone un esempio:

$$\begin{array}{l|l}
1+x & 1-x \\ \cline{2-2}
-1+x & 1+2x+2x^2+2x^3+\dots \\ \cline{1-1}
2x & \\
-2x+2x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad 2x^2 & \\
\qquad -2x^2+2x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 2x^3 & \\
\qquad\qquad \dots &
\end{array}$$

Tali quozienti non verranno qui presi in considerazione.

CAPITOLO V.

Divisibilità e massimo comun divisore dei polinomi.

30. Definizione e primi teoremi sulla divisibilità. Allorquando, eseguendo la divisione di un polinomio ordinato per un altro polinomio ordinato secondo la regola del § 28, si trova per resto zero, si dice che il primo polinomio è *divisibile* per il secondo, o che il secondo è *divisore* del primo.

Così

$$3x^2+5x-2$$

è divisibile per

$$x+2;$$

così

$$\frac{1}{4}x^2-1$$

è divisibile per

$$\frac{1}{2}x-1.$$

Sulla divisibilità dei polinomi si possono enunciare le seguenti proposizioni fondamentali:

Teorema I. « Quando due polinomi sono divisibili per un terzo, anche la loro somma è divisibile per questo terzo. »

Teorema II. « Quando due polinomi sono divi-

sibili per un terzo, anche la loro differenza è divisibile per questo terzo. »

31. Divisibilità di $a^n - b^n$ per $a - b$.

Teorema: « La differenza delle potenze simili di due numeri è sempre divisibile per la differenza di questi numeri. »

Questo teorema importante e fecondo in applicazioni si può esprimere coll'enunciato abbreviato: « $a^n - b^n$ è sempre divisibile per $a - b$. »

Per dimostrare il teorema, si divida anzitutto la differenza delle seconde potenze di due numeri a e b per la differenza $a - b$, poi la differenza delle terze potenze, poi delle quarte, e cosi via: si eseguiscano cioè le operazioni:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b}, \quad \frac{a^3 - b^3}{a - b}, \quad \frac{a^4 - b^4}{a - b}, \ldots$$

e si trova:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + a\,b + b^2$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2\,b + a\,b^2 + b^3$$

ed i resti di tutte queste divisioni sono nulli. I quozienti di esse divisioni sono formati colle seguenti regole:

a) Essi sono di grado inferiore di una unità al dividendo, e contengono tanti termini quante sono le unità del grado del dividendo.

b) Essi sono omogenei, ordinati per le po-

tenze decrescenti della prima lettera e crescenti della seconda.

c) Tutti i loro termini hanno per coefficiente 1 (che si sottintende) e per segno +.

Queste regole, che si sono *verificate* per le prime divisioni, sono generali: e ciò si può dimostrare nel seguente modo:

Se il grado del dividendo è n, esso sarà $a^n - b^n$: il quoziente sarà del grado $n - 1$ e scrivendolo in virtù delle regole *a*), *b*), *c*) esso sarà

$$a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + a^{n-4} b^3 + \dots$$
$$a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1}$$

Tale sarà la forma che dovrà avere il quoziente della divisione

$$\frac{a^n - b^n}{a - b}$$

se si ammettono le regole *a*), *b*), *c*): ora a dimostrarle e a verificare che il polinomio sopra scritto è veramente il quoziente esatto di tale divisione, basterà mostrare che moltiplicandolo per $a - b$, si ritrova $a^n - b^n$. Eseguendo:

$$a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + a^{n-4} b^3 + \dots a b^{n-2} + b^{n-1}$$
$$a - b$$

$$a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + a^{n-3} b^3 + \dots$$
$$+ a^2 b^{n-2} + a b^{n-1}$$
$$- a^{n-1} b - a^{n-2} b^2 - a^{n-3} b^3 - \dots$$
$$- a b^{n-1} - b^n$$

$$a^n \qquad\qquad - \qquad\qquad b^n$$

c. d. d.

32. Conseguenze della divisibilità di $a^n - b^n$ per $a - b$. Applicazioni del precedente teorema:

1.° Facciasi $b = 1$, sarà anche $b^n = 1$, e si avrà:

« Che a essendo un numero qualunque,

$$a^n - 1$$

sarà sempre divisibile per

$$a - 1$$

ed il quoziente sarà

$$a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots a^3 + a^2 + a + 1.$$

2.° Se in particolare si fa

$$a = 10,$$

ne segue che

$$10^n - 1$$

è sempre divisibile per

$$10 - 1 = 9,$$

cioè che una potenza di 10 divisa per 9 dà per avanzo 1, che è il primo teorema che si enuncia in Aritmetica nella teoria della divisibilità per 9

3.° Avendosi un binomio composto della differenza delle potenze simili di due lettere, lo si potrà sempre scomporre in un prodotto di due fattori, uno dei quali sarà la differenza delle due lettere, e l'altro composto con esse due lettere nel modo indicato dalle regole precedenti.

Esempi:

1.° $a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$
2.° $a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + a\,b + b^2)$
3.° $a^3 - 8 = (a - 2)\ (a^2 + 2\,a + 4)$
4.° $x^4 - 1 = (x - 1)\ (x^3 + x^2 + x + 1)$
5.° $(a + b)^2 - c^2 = (a + b - c)\ (a + b + c)$
6.° $\begin{cases} (a + b)^3 - c^3 = (a + b - c)\ [(a + b)^2 + \\ \qquad + (a + b)\,c + c^2] = \\ = (a + b - c)(a^2 + 2\,a\,b + b^2 + a\,c + b\,c + c^2) \end{cases}$
7.° $1 - a^5\,b^5 = (1 - a\,b)\ (1 + a\,b + a^2\,b^2 + $
$+ a^3\,b^3 + a^4\,b^4)$.

33. Del massimo comun divisore algebrico. Due monomi hanno per *massimo comun divisore* il monomio *di più alto grado* che li divide ambedue (v. § 24).

Due polinomi ordinati per le potenze di una stessa lettera hanno per divisori comuni quei polinomi ordinati nella stessa guisa che li dividono ambedue: fra i divisori comuni, quello *di più alto grado* si dice massimo comun divisore. Così:

$$a^6 - 1 \quad \text{ed} \quad a^9 - 1$$

sono divisibili ambedue per i soli polinomi

$$a - 1 \quad \text{ed} \quad a^3 - 1;$$

quest'ultimo essendo di grado superiore sarà il massimo comun divisore.

La ricerca del massima comun divisore di due polinomi si fonda su principii analoghi a quelli che servono in aritmetica per la ricerca del M. C. D. fra due numeri interi. Questi principi sono i seguenti:

Teorema I. « Se due polinomi sono divisibili l'uno per l'altro, quello di grado inferiore è il M. C. D.

Teorema II. « Se due polinomi non sono divisibili uno per l'altro e dànno un resto, il loro M. C. D. è lo stesso del M. C. D. fra il polinomio divisore ed il resto. »

Dai due teoremi enunciati risulta la seguente

Regola. Siano indicati con A e B i due polinomi ordinati per le potenze decrescenti di una stessa lettera, e sia A di grado superiore; si divide A per B: se la divisione riesce esattamente B sarà il M. C. D.

Se la divisione non riesce, vi sarà un resto R; si divide B per R: se questa seconda divisione si fa esattamente, R sarà il M. C. D. di B ed R e quindi di A e B; se non si fa esattamente vi sarà un resto R': si divide R per R', e così via. I divisori successivi diminuendo sempre di grado, l'operazione potrà aver termine in due modi: o si troverà un resto nullo, ed allora l'ultimo divisore adoperato, cioè il penultimo resto, sarà il M. C. D. dei due polinomi; o si troverà per resto 1 o un numero (non contenente più la lettera ordinatrice) e allora i due polinomi non avranno divisori comuni e si diranno *primi fra loro.*

Moltiplicando o dividendo sia il dividendo, sia il divisore di una delle divisioni per un numero qualunque che non contenga la lettera ordinatrice si verranno ad alterare i quozienti di tali divisioni ed i resti; ma i fattori numerici che così si introdurranno non avendo alcun' impor-

tanza per la ricerca del M. C. D., simili moltiplicazioni o divisioni saranno spesso utili nella pratica all'oggetto di schivare coefficienti frazionarii, o di semplificare i polinomi su cui si opera col sopprimervi qualche fattore numerico.

Esempi. Sia da cercare il M. C. D. fra

$$2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$$

e

$$2x^2 + x - 10.$$

Operazioni:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 & 2x^2 + x - 10 \\ \cline{2-2} \left\{\begin{array}{r} -3x^2 + 8x - 4 \\ -6x^2 + 16x - 8 \end{array}\right. & \quad x - 3 \\ \left\{\begin{array}{r} 19x - 38 \\ x - 2 \end{array}\right. & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + x - 10 & x - 2 \\ \cline{2-2} 5x - 10 & 2x + 5 \\ 0. & \end{array}$$

Il M. C. D. dei due polinomi è

$$x - 2.$$

Si è approfittato dell'ultima osservazione per semplificare le operazioni:

1.° Moltiplicando per 2 il dividendo parziale della prima divisione per schivare un coefficiente frazionario al quoziente.

2.° Dividendo per 19 il resto della prima divisione, per schivare coefficienti frazionari al quoziente della seconda divisione.

Per determinare il M. C. D. di più polinomi

A, B, C, D, si cerca il M. C. D. di A e B colla regola indicata, e sia M_1, poi di C ed M_1, e sia M_2; poi di D ed M_2; e sia M: quest'ultimo sarà il M. C. D. cercato.

34. Raccoglimento dei fattori comuni. Abbiamo già fatto cenno dell'operazione che dicesi raccoglimento dei fattori comuni e che consiste nell'*indicare* per mezzo delle parentesi, una moltiplicazione di cui è dato il risultato *eseguito.*

Il fattore comune che si raccoglie può essere secondo i casi:

1.° Un monomio:

a) Un fattor numerico, come nell'esempio:

$$48\,a^3 b + 24\,a^3 b^2 + 36\,c^4 = 12\,(4\,a^3 b + 2\,a^3 b^2 + 3\,c^4)$$

b) Una lettera, come in:

$$5\,x^3 + 5\,x^2 + 7\,x = x\,(5\,x^2 + 5\,x + 7);$$

c) Un prodotto di lettere e numeri come nell'esempio:

$$8\,a^2 b^4 + 24\,a^3 b^5 - 16\,a^3 b^3 = 8\,a^2 b^3\,(b + 3\,a\,b^2 - 2\,a).$$

In alcuni casi la quantità che si deve *raccogliere* è *isolata* o sola in un termine: ma questo caso non presenta difficoltà, ricordando che tale quantità si può riguardare come avente per coefficiente l'unità. Esempio.

$$x^2 + x = x^2 + 1\,.\,x = x\,(x + 1) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 8\,a^2 b^2 + 2\,a\,b^2 + 4\,c\,b^3 a^2 &= \\ = 2\,a\,b^2\,(4\,a + 1 + 2\,c\,b\,a) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$4\,x^2 - 8\,x + 4 = 4\,(x^2 - 2\,x + 1). \qquad (3)$$

2.° Un polinomio.

In vari casi, che la pratica insegna a riconoscere, si può raccogliere a fattor comune un polinomio.

Ecco alcuni esempi:

$$\left.\begin{aligned}&4ax+3a^2+x^2=\\&3a^2+3ax+ax+x^2=\\&3a(a+x)+x(a+x)=\\&(3a+x)(a+x).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&am+bn+an+bm\\&=am+bm+an+bn\\&=m(a+b)+n(a+b)\\&=(m+n)(a+b).\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}&a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2\\&=a(a+b)-b(a+b)\\&=(a+b)(a-b).\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

E in generale si è visto (§ 31) che

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b+\ldots b^{n-1}).$$

$$\left.\begin{aligned}&ax-4bx+5ay-20by=\\&x(a-4b)+5y(a-4b)=\\&(x+5y)(a-4b).\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

3.° Occorre talvolta di porre a fattore comune una lettera o una quantità che non figura in tutti i termini del polinomio dato: si procede allora come nei seguenti esempi:

$$\left.\begin{aligned}a+b&=a+\frac{ab}{a}\\&=a\left(1+\frac{b}{a}\right).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned} & a^3 b + a^2 b^2 + c^3 = \\ & a^3 b + a^2 b^2 + c^3 \frac{a^2 b}{a^2 b} = \\ & a^2 b \left(a + b + \frac{c^3}{a^2 b}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} & a + b + c = \\ & (a + b)\left(1 + \frac{c}{a + b}\right). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Il raccoglimento dei fattori comuni serve nelle operazioni su polimoni che contengono più lettere, quando conviene che questi polinomi siano ordinati rispetto alle varie lettere che in essi entrano. Così per ordinare il polinomio:

$$4\,a^3 x^2 + 5\,a^2 x^2 + 6\,a + 7\,x + 4\,a^3 x + 9\,a^2 \\ + 5\,a\,x + 3 + 11\,a\,x^2,$$

si scriverà

$$x^2 (4\,a^3 + 5\,a^2 + 11\,a) + x\,(4\,a^3 + 5\,a + 7) \\ + 9\,a^2 + 6\,a + 3;$$

il polinomio è ordinato rispetto ad x, e le potenze di x sono moltiplicate per polimoni ordinati rispetto ad a. Così ancora:

$$a^2\,d\,x + a^4 + 3\,a^2 x^2 - a\,x + b\,c\,x^2 + a^3 x^3 \\ + b\,d\,x + a^2 x^3 + x^4$$

si scriverà

$$x^4 + (a^3 + a^2)\,x^3 + (3\,a^2 + b\,c)\,x^2 \\ + (b\,d + a^2\,d - a)\,x + a^4$$

che talvolta viene anche scritto:

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^4 + a^3 & x^3 + 3\,a^2 & x^2 + b\,d & x + a^4. \\ + a^2 & + b\,c & + a^2\,d & \\ & & - a & \end{array}$$

Tale raccoglimento è indispensabile per la moltiplicazione e la divisione dei polinomi che contengono più lettere.

CAPITOLO VI.

Le frazioni algebriche.

35. Definizione e teorema fondamentale. Una frazione algebrica è l'indicazione di una divisione che non si può altrimenti eseguire: la frazione è dunque un simbolo che sta a rappresentare il quoziente. Al numeratore si pone il dividendo, al denominatore il divisore.

Teorema. « Moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione per la stessa quantità il valore della frazione non si altera. »

Dimostrazione. « Sia la frazione $\frac{A}{B}$. Essa sta a rappresentare il quoziente della divisione di A per B, e quindi per la definizione generale della divisione, sarà

$$\frac{A}{B} \times B = A.$$

Moltiplichiamo queste quantità uguali per la stessa quantità qualunque m, i risultati saranno ancora uguali, e

$$\frac{A}{B} \times B m = A m$$

o esprimendo in parole:

$A m$ è un prodotto di cui $B m$ ed $\frac{A}{B}$ sono i fattori: epperciò per la definizione stessa della divisione sarà

$$\frac{A m}{B m} = \frac{A}{B},$$

c. d. d.

Questo teorema conduce subito alla *semplificazione* delle frazioni; una frazione non cambierà di valore ma avrà termini più semplici quando saranno soppressi i fattori comuni ai due termini. Se i termini sono monomi la semplificazione non presenta difficoltà perchè i fattori comuni si scorgono immediatamente.

La frazione si dice *irriducibile* o *ridotta ai minimi termini* quando i suoi termini non contengono più fattori comuni, ossia sono primi fra loro.

Regola. « Per ridurre ai minimi termini una frazione, si cerca il M. C. D. dei due termini e si dividono ambo i termini per questo M. C. D. »

Esempio. La frazione

$$\frac{48\, a^2\, b^3\, c^4}{120\, a^4\, b^2\, c^3}$$

ridotta ai minimi termini è

$$\frac{2\,b\,c}{5\,a^2}.$$

Abbiasi la frazione

$$\frac{x^3+8\,x^2+x+8}{x^4-3\,x^3+2\,x^2-3\,x+1}$$

cercando il M. C. D. dei due termini colla regola data al § 33 si trova

$$x^2+1$$

e dividendo ambo i termini per questo M. C. D. la frazione si riduce a

$$\frac{x+8}{x^2-3\,x+1}.$$

I termini di questa si dicono più semplici dei termini della frazione proposta perchè sono di grado inferiore.

36. RIDUZIONE DI PIÙ FRAZIONI ALLO STESSO DENOMINATORE. *Teorema.* « Se

$$\frac{A}{B},\ \frac{C}{D},\ \frac{E}{F},$$

sono frazioni qualunque, ed N è un'espressione qualunque divisibile per tutti i denominatori, si potranno sempre sostituire alle frazioni proposte altrettante frazioni rispettivamente uguali, ed aventi N per denominatore comune. »

Dimostrazione. Sia N, come si è detto, un

multiplo comune di B, D, F; i quozienti di N per B, D, F, saranno pertanto espressionl intere senza resto: cioè

$$\begin{cases} \dfrac{N}{B} = Q_1 \\[2mm] \dfrac{N}{D} = Q_2 \\[2mm] \dfrac{N}{F} = Q_3 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} N = B \times Q_1 \\ N = D \times Q_2 \\ N = F \times Q_3. \end{cases}$$

Ora moltiplicando i due termini delle varie frazioni rispettivamente per Q_1, Q_2, Q_3, si avrà

$$\begin{cases} \dfrac{A}{B} = \dfrac{A\,Q_1}{B\,Q_1} = \dfrac{A\,Q_1}{N} \\[2mm] \dfrac{C}{D} = \dfrac{C\,Q_2}{D\,Q_2} = \dfrac{C\,Q_2}{N} \\[2mm] \dfrac{E}{F} = \dfrac{E\,Q^3}{F\,Q_3} = \dfrac{E\,Q_3}{N} \end{cases}$$

e così alle frazioni proposte

$$\frac{A}{B},\ \frac{C}{D},\ \frac{E}{F}$$

si sono sostituite le altre

$$\frac{A\,Q_1}{N},\ \frac{C\,Q_2}{N},\ \frac{E\,Q_3}{N}$$

rispettivamente uguali alle prime ed aventi lo stesso denominatore N, c. d. d.

Da questo teorema segue la regola per la riduzione di più frazioni allo stesso denominatore:

Regola: « Si cerca una espressione che sia esattamente divisibile per tutti i denominatori; questa si divide per i singoli denominatori e si moltiplicano i due termi di ogni frazione per il rispettivo quoziente. »

Per trovare una quantità che sia esattamente divisibile per tutti i denominatori basta prendere il prodotto di tutti i denominatori: ed è ciò che si fa allorquando i denominatori sono primi fra loro, come avviene per lo più quando i denominatori sono polinomi.

Esempio: Siano le frazioni

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}.$$

Il denominatore comune sarà

$$a\,b\,c,$$

i tre quozienti sono

$$\frac{a\,b\,c}{a} = b\,c, \frac{a\,b\,c}{b} = a\,c, \frac{a\,b\,c}{c} = a\,b,$$

e le tre frazioni ridotte allo stesso denominatore:

$$\frac{b\,c}{a\,b\,c}, \frac{a\,c}{a\,b\,c}, \frac{a\,b}{a\,b\,c}.$$

Nel caso di frazioni aventi per denominatori

monomi con lettere comuni, il minimo multiplo comune dei denominatori si ottiene prendendo un monomio che abbia per coefficiente il minimo multiplo dei coefficienti e che contenga tutte le lettere dei vari denominatori, ciascuna col maggior esponente.

Esempio: Sia da ridurre allo stesso denominatore le frazioni

$$\frac{a^2}{8\,b^3\,c^2},\quad \frac{b^2}{24\,a^3\,c^2},\quad \frac{c^2}{12\,a^2\,b^3}.$$

Il minimo multiplo dei denominatori sarà

$$24\,a^3\,b^3\,c^2,$$

i tre quozienti:

$$3\,a^3,\ b^3,\ 2\,a\,c^2$$

e le frazioni ridotte allo stesso denominatore:

$$\frac{3\,a^5}{24\,a^3\,b^3\,c^2},\quad \frac{b^5}{24\,a^3\,b^3\,c^2},\quad \frac{2\,a\,c^4}{24\,a^3\,b^3\,c^2}.$$

37. Operazioni sulle frazioni. *a*) L'addizione e la sottrazione delle frazioni algebriche si fanno riducendo le frazioni ad ugual denominatore, poi sommando e sottraendo i numeratori e dando al risultato il denominatore comune.

Una espressione intera mista alle frazione si può sempre riguardare come una espressione frazionaria avente per denominatore l' unità; questa osservazione vale per tutte le operazioni sulle frazioni.

b) « Per moltiplicare due frazioni si fa la moltiplicazione termine a termine. »

Dimostrazione. Dico che

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}.$$

Ricordiamo che una frazione indica un quoziente: indichiamo con Q il quoziente rappresentato da $\frac{A}{B}$, con Q' quello rappresentato da $\frac{C}{D}$; avremo

$$\frac{A}{B} = Q, \quad \frac{C}{D} = Q'$$

e per la definizione della divisione

$$A = B\,Q, \quad C = D\,Q'.$$

Moltiplichiamo fra di loro queste ultime eguaglianze ed avremo:

$$A\,C = B\,Q\,D\,Q'$$

o anche

$$A\,C = B\,D \times Q\,Q',$$

da cui per la definizione della divisione

$$\frac{A\,C}{B\,D} = Q\,Q'$$

Ma Q e Q' sono lettere poste a rappresentare i quozienti $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$, onde

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A\,C}{B\,D},$$

c. d. d.

Da questo teorema risulta immediatamente la regola per la moltiplicazione di un numero qualunque di frazioni.

c) « Il quoziente della divisione di due frazioni si ottiene moltiplicando la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata. »

Dimostrazione. Dividere la frazione $\frac{A}{B}$ per la frazione $\frac{C}{D}$ significa trovare quella quantità che moltiplicata per $\frac{C}{D}$ riproduce $\frac{A}{B}$. Questo quoziente si indichi con X: esso sarà definito da

$$X \times \frac{C}{D} = \frac{A}{B}.$$

Moltiplicando queste quantità uguali per il prodotto $B\,D$, si otterrà

$$X \times \frac{C\,B\,D}{D} = \frac{A\,B\,D}{B}$$

ovvero sopprimendo i fattori comuni.

$$X\,C\,B = A\,D,$$

ossia X è quella quantità che moltiplicata per $B\,C$ produce $A\,D$ e quindi per definizione della divisione sarà

$$X = \frac{A\,D}{B\,C}.$$

Ma per la regola della moltiplicazione delle

frazioni

$$\frac{AD}{BC}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$$

onde

$$X=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$$

c. d. d.

38. Frazioni i cui termini contengono frazioni. La regola della divisione delle frazioni dà il modo di ridurre a frazioni ordinarie quelle che contengono frazioni nei loro termini. Sia per esempio:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Riduco allo stesso denominatore e sommo le frazioni contenute nei singoli termini, e trovo:

$$\frac{\frac{bc+ac+ab}{abc}}{\frac{mq+np}{nq}};$$

ed ho così una divisione di due frazioni che eseguita colla regola precedente dà:

$$\frac{(bc+ac+ab)\,nq}{abc\,(mq+np)}$$

che è una frazione algebrica ordinaria, cioè contenente nei suoi termini espressioni intere.

Così si riducono pure le *frazioni continue limitate*, come ad esempio

$$a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a}}}$$

che ridotta di mano in mano colle regole del calcolo delle frazioni dà per risultato:

$$\frac{a^4 + 3\,a^2 + 1}{a^3 + 2\,a}.$$

CAPITOLO VII.

Le proporzioni.

39. Definizioni. Una frazione $\frac{a}{b}$ i cui termini a e b possono essere numeri qualunque (interi frazionari od incommensurabili) si dice anche *rapporto* dei due numeri a e b [1].

---

[1] Si distinguono negli antichi trattati i *rapporti geometrici*, che sono le *frazioni*, dai *rapporti aritmetici* (che così si dicevano le *differenze*) e le *proporzioni geometriche* o *uguaglianza di due frazioni* dalle *proporzioni aritmetiche* o *uguaglianza di due differenze*. Tanto i rapporti che le proporzioni aritmetiche sono caduti in disuso.

Si dice talvolta: « Rapporto di a e b è il numero che

Si chiama ***proporzione*** l'eguaglianza di due rapporti, ossia di due frazioni. Così

$$\frac{3}{4} = \frac{24}{32}$$

è una proporzione. Se le due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono eguali, la scrittura

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

sarà dunque una proporzione (1).

La proporzione precedento si dice ***sussistere*** fra i quattro numeri

$$a, b, c, d$$

scritti in questo determinato ordine: così fra

$$3, 4, 24, 32$$

---

misura a se b si prende come unità.» Questa definizione coincide colla nostra. Infatti $\frac{a}{b} \times b = a$, cioè (def. della moltiplicaz.) «a è rispetto a b ciò che $\frac{a}{b}$ è rispetto all'unità;» se dunque b diventa l'unità, a diventa $\frac{a}{b}$.

Si noti infine che in questo Capitolo noi trattiamo dei *rapporti fra numeri,* e quindi li riguardiamo come frazioni, e non intendiamo accennare ai rapporti fra grandezze. Per i rapporti considerati sotto questo punto di vista, V. *Manuale di Geometria Pura,* § XI.

(1) La proporzione si legge: «a sta a b come c sta a d.» Così 3 sta a 4 come 24 a 32 vuol dire che $\frac{3}{4}$ è uguale a $\frac{24}{32}$.

vi è proporzione. (Ma non vi sarebbe lecito dire che vi è proporzione fra 4, 3, 24, 32).

Una proporzione si scrive anche da taluni

$$a:b::c:d;$$

così la scrittura

$$3:4::24:32$$

altro non esprime che l'uguaglianza delle due frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{24}{32}$.

Nella proporzione

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

a e b sono i 2 *primi termini*,
c e d sono i 2 *ultimi*,
a e c sono gli *antecedenti*,
b e d sono i *conseguenti*,
a e d sono gli *estremi*,
b e c sono i *medi*,
d si dice la *quarta proporzionale* in ordine ad a, b e c.

Se i due medi sono uguali la proporzione si dice *continua:* così

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

come ad esempio

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$$

è una proporzione continua: una proporzione

continua si scrive talvolta

$$a:b:c, \quad 4:6:9.$$

Si dice allora che
b è ***media proporzionale*** fra a e c,
c è ***terza proporzionale*** ad a e b..

40. Teorema fondamentale. « In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi; e reciprocamente, se quattro numeri scritti in un certo ordine sono tali che il prodotto dei medi sia uguale al prodotto degli estremi, questi numeri formano una proporzione nell'ordine in cui essi sono scritti. »

a) ***Dimostrazione*** del teorema diretto.

Siano i quattro numeri

$$a, b, c, d$$

formanti una proporzione: ciò vuol dire che le due frazioni

$$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d}$$

sono eguali. Riduciamo queste frazioni allo stesso denominatore, esse si mantengono uguali, e

$$\frac{a\,d}{b\,d} = \frac{b\,c}{b\,d};$$

ma ora le due frazioni sono uguali ed hanno lo stesso denominatore, è dunque necessario che siano uguali i numeratori, cioè

$$a\,d = b\,c,$$

c. d. d.

b) *Dimostrazione* del Teorema reciproco.

Siano i quattro numeri

$$a,\ b,\ c,\ d$$

tali che

$$a\,d = b\,c.$$

Dico che essi formano una proporzione nell'ordine in cui si trovano scritti, cioè che

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Dividendo infatti le quantità uguali

$$a\,d \text{ e } b\,c$$

per la stessa quantità

$$b\,d$$

i risultati saranno eguali, cioè

$$\frac{a\,d}{b\,d} = \frac{b\,c}{b\,d}$$

o semplificando,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

c. d. d.

Corollarî. *a*) Il teorema precedente servirà a riconoscere se due frazioni apparentemente diverse siano o no eguali.

b) In una proporzione continua il quadrato della media proporzionale è uguale al prodotto dei due altri termini.

Infatti da

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

risulta

$$b^2 = a\,c.$$

41. Vari modi di scrivere una proporzione. Abbiansi i quattro numeri a, b, c, d formanti una proporzione

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Da essa deduciamo (§ 40)

$$a\,d = b\,c.$$

Ma scrivendo questi quattro numeri nei seguenti modi:

a	c	b	d
d	c	b	a
d	b	c	a
c	a	d	b
c	d	a	b
b	d	a	c
b	a	d	c

in ognuna di tali quaderne sarà sempre vero che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, e quindi per il teorema reciproco del paragrafo precedente sussisteranno altrettante proporzioni.

Dunque:

« Da una proporzione si possono ottenere

nuove proporzioni con tutti quei cambiamenti che non alterano l'eguaglianza del prodotto dei medi e degli estremi, e in particolare:

« Si ponno invertire fra loro i medi, — si ponno invertire gli estremi, — si può invertire ogni antecedente col suo conseguente. »

42. ALTRE PROPORZIONI CHE SI POSSONO DEDURRE DA UNA DATA. *Teorema. I.* « In una proporzione la somma (o differenza) del 1.° e del 2.° termine sta al 2.° termine come la somma (o differenza) del 3.° e del 4.° sta al 4.° »

Dimostrazione. Se le due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono eguali, anche aggiungendo o togliendo l'unità ad ambedue esse resteranno eguali, talchè

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

onde eseguendo le addizioni e sottrazioni, riducendo l'intero 1 allo stesso denominatore delle frazioni, viene:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

c. d. d.

Teorema II. « In una proporzione la somma (o differenza) degli antecedenti sta alla somma (o differenza) dei conseguenti come uno degli antecedenti sta al suo conseguente. »

Infatti dalla proporzione

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

si deduce per il teorema del § 41:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$

da cui per il teorema precedente

$$\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d},$$

e da questa, da capo per il teorema del § 41:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}.$$

Corollario. « Se si ha una serie qualunque di rapporti (frazioni) eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come uno degli antecedenti sta al suo conseguente. »

Abbiasi la serie di rapporti o frazioni eguali:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}.$$

Si ha per il teorema precedente

$$\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{a}{a'}:$$

onde

$$\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{c}{c'}:$$

applicando da capo il teorema precedente

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'},$$

e infine

$$\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}.$$

43. Problemi sulle proporzioni. *a*) « Trovare la quarta proporzionale in ordine a tre numeri dati a, b, c. ».

Si indichi con x la quarta proporzionale richiesta: dovrà essere

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

e quindi

$$a\,x=b\,c.$$

Dunque x è quel numero che moltiplicato per a produce bc: perciò (definizione della divisione).

$$x=\frac{b\,c}{a}$$

Onde la regola

« Per avere la 4.ª proporzionale a tre numeri dati, si fa il prodotto dei medi dati e si divide per l'estremo dato. »

Se, dati tre numeri a, b, c, si dovesse trovare un numero x tale che

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{c}$$

si osserverebbe (§ 41) che questa proporzione equivale all'altra

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{x}$$

e si tornerebbe al problema precedente.

b) « Trovare una terza proporzionale a due numeri dati. »

Siano a e b i numeri dati, x la terza proporzionale cercata.

Si vuole che

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Da ciò si deduce

$$a\,x = b^2$$

e

$$x = \frac{b^2}{a}$$

ossia:

« Per trovare la 3.ª proporzionale a due numeri dati si fa il quadrato della media proporzionale e si divide per l'estremo dato. »

Questo problema coincide col primo nel caso che si faccia $b = c$.

c) « Trovare la media proporzionale a due numeri dati. »

Siano a e b i numeri dati, x la media proporzionale; deve essere

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

ossia

$$x^2 = a\,b.$$

La media proporzionale è dunque quel numero che moltiplicato per sè stesso produce il prodotto degli estremi, e quindi, per la definizione della

radice quadrata, sarà

$$x = \sqrt{a\,b}$$

ossia:

« La media proporzionale fra due numeri è la radice quadrata del prodotto di questi numeri. »

Così la media proporzionale fra 4 e 36 è

$$x = \sqrt{4 \times 36} = \sqrt{144} = 12. \ (^1)$$

d) Dividere un numero dato in parti proporzionali a numeri dati. »

Ciò significa dividere il numero dato in parti (due o più) di cui si conoscono i rapporti.

Sia dunque da dividere il numero N in due parti che abbiano il rapporto indicato dalla frazione $\frac{a}{b}$ o come si suol dire, che ***stiano fra loro*** come a sta a b. Siano x ed y le parti cercate: si avrà

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

da cui

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

(1) Conviene ricordare che la *media proporzionale* o *media geometrica* fra due numeri va distinta dalla *media aritmetica* di questi numeri, che è la loro semi-somma. Così la media geometrica di 4 e 36 è 12, e la media aritmetica è $\frac{4+36}{2} = 20$.

e per teorema II al § 42

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b},$$

ossia, essendo

$$x+y=N,$$
$$\frac{x}{a}=\frac{N}{a+b},\quad \frac{y}{b}=\frac{N}{a+b},$$

da cui

$$x=\frac{aN}{a+b},\quad y=\frac{bN}{a+b};$$

cioè:

« Per dividere un numero in parti proporzionale a due numeri dati si moltiplica il numero dato rispettivamente per i numeri esprimenti il rapporto delle parti e si divide per la somma di questi numeri. »

CAPITOLO VIII.

Calcolo delle potenze.

44. Operazioni sulle potenze. *a*) « Per moltiplicare più potenze di una stessa lettera si innalza questa lettera ad una potenza avente per esponente la somma degli esponenti dei fattori. »

Questo teorema si è già dimostrato (§ 18, *b*): esso si esprime colla formola

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q = a^{m+n+p+q}$$

e si enuncia in modo più spedito, ma meno preciso, dicendo:

« Per moltiplicare più potenze della stessa lettera si sommano gli esponenti. »

b) Per dividere due potenze della stessa lettera si innalza quella lettera ad una potenza avente per esponente la differenza degli esponenti. »

Cioè

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Questa formola è già stata dimostrata (§ 24, *b*): è però necessario che sia $m > n$, altrimenti a^{m-n} sarebbe una potenza negativa che (per ora) non ha significato.

Conviene però notare che se $n = m$,

$$\frac{a^m}{a^n} = 1$$

e se $n > m$, si possono sopprimere ai due termini della frazione

$$\frac{a^m}{a^n}$$

m fattori a al numeratore e al denominatore, e rimane

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

c) « Per innalzare una potenza ad una nuova potenza si moltiplicano gli esponenti. »

Cioè s'innalza la lettera ad una potenza indicata dal prodotto dei due esponenti.

Dimostrazione. Sia da innalzare a^m alla n^{ma} potenza, il che si indica con

$$(a^m)^n:$$

si dovrà fare il prodotto

$$a^m . a^m . a^m \ldots a^m (n \text{ fattori})$$

o per la regola *a*):

$$a^{m+m+m \ldots + m (n \text{ volte})}$$

$$= a^{mn}$$

onde

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

c. d. d.

d) « Per innalzare un prodotto ad una potenza s'innalzano a quella potenza i suoi fattori. »

Dimostrazione. Sia da innalzare alla n^{ma} potenza il prodotto $a\, b\, c$, il che si indica con

$$(a\, b\, c)^n.$$

Sarà

$$(a\, b\, c) = a\, b\, c\;\; a\, b\, c\;\; a\, b\, c \ldots a\, b\, c$$

ma potendosi invertire i fattori

$$(a\, b\, c)^n = a\, a\, a \ldots a\, b\, b\, b \ldots b\, c\, c\, c \ldots c$$

ossia

$$(a\, b\, c)^n = a^n\, b^n\, c^n$$

c. d. d.

e) « Per innalzare una frazione ad una po-

tenza basta innalzare a quella potenza i due termini della frazione. »

Dimostrazione. Sia da innalzare alla n^{ma} potenza la frazione $\frac{a}{b}$, operazione che si indica con

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Sarà

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b},$$

ma per la regola della moltiplicazione delle frazioni, questo prodotto equivale ad

$$\frac{a \,.\, a \,.\, a \ldots a}{b \,.\, b \,.\, b \ldots b},$$

ossia

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

c. d. d.

45. Potenze di un numero negativo. Risulta immediatamente dalla regola dei segni della moltiplicazione che un numero dispari di fattori negativi darà un prodotto negativo, ed un numero pari darà un prodotto positivo. Segue da ciò che una potenza dispari di un numero negativo sarà negativa, ed una potenza pari di un numero negativo sarà positiva.

Esempi:

$$(-8)^3 = -8^3 = -512$$
$$(-5)^4 = 5^4 = 625$$

Questa regola si esprime colle formole:

$$(-a)^{2n} = a^{2n}, \ (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

46. Applicazione della regola precedente alla divisibilità di $a^n + b^n$ ed $a^n - b^n$ per $a+b$. Si è veduto al § 31 che $a^n - b^n$ è sempre divisibile per $a-b$, e si è anche trovata la forma del quoziente:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2} b + \ldots + a b^{n-2} + b^{n-1}.$$

S'intenda ora sostituito a b il numero $-b$: e distinguiamo 2 casi, secondo che n è pari o dispari.

a) Se n è pari e uguale a $2m$, $(-b)^n$ si cambia in $+b^n$ o b^{2m}, invece $a-(-b)$ si cambia in $a+b$, e si trova che

« $a^n - b^n$ è divisibile per $a+b$ se n è pari. »

b) Se n è dispari e uguale a $2m+1$, $(-b)^n$ si cambia in $-b^n$ o $-b^{2m+1}$, e il dividendo sarà

$$a-(-b)^n = a^n + b^n,$$

e si trova così che:

« $a^n + b^n$ è divisibile per $a+b$ se n è dispari. »

47. Regola di Newton per la potenza di un binomio. Mentre per fare la potenza di un prodotto basta fare la potenza dei vari fattori, sarebbe un errore il supporre che la potenza d'una somma risultasse dalla somma delle potenze delle sue

parti. Basta notare infatti che

$$(4+3)^2=7^2=49$$

mentre

$$4^2+3^2=25.$$

La teoria che andiamo ad esporre e che è dovuta all'illustre I. Newton (1642-1727), ha per oggetto di trovare in qual modo la potenza di una somma sia formata colle potenze delle sue parti e tratteremo più specialmente del caso, cui si riconducono tutti gli altri, che la somma sia composta di due parti. Cerchiamo adunque lo *sviluppo* della potenza di un binomio.

Per trovare secondo quali regole si deve formare questo sviluppo, formiamo colle successive moltiplicazioni di $a+b$ per sè stesso la 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª,... potenza del binomio $a+b$; troviamo così:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+$$
$$+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+$$
$$+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

. . . .

Esaminando attentemente i prodotti così ottenuti, si riscontrano le seguenti regole:

I. I vari polinomi ottenuti come prodotti sono tutti omogenei e di grado uguale alla potenza del binomio.

II. Essi sono ordinati per le potenze decrescenti di a e crescenti di b.

III. Essi sono completi, cioè contengono tutte le successive potenze di a e di b, ed il numero dei loro termini è uguale all'esponente del binomio aumentato di un'unità.

IV. Tutti i termini hanno il segno positivo.

V. Il primo coefficiente è l'unità, il secondo è l'esponente del binomio: ed i coefficienti vanno aumentando fino alla metà dello sviluppo e quindi vanno decrescendo, riproducendosi quelli della prima metà in ordine inverso; l'ultimo coefficiente è 1.

Se il numero dei termini è pari (cioè n dispari), vi sono nel mezzo due coefficienti massimi uguali; se il numero dei termini è dispari vi è un solo coefficiente massimo nel mezzo.

VI. Ogni coefficiente si deduce dal coefficiente del termine precedente, moltiplicando questo coefficiente per l'esponente della prima lettera e dividendo per il numero d'ordine di esso termine precedente; i coefficienti che così si ottengono sono tutti numeri interi.

Le varie regole così enunciate non sono dimostrate, ma soltanto verificate sui primi sviluppi

$$(a+b)^2,\ (a+b)^3,\ (a+b)^4,\ (a+b)^5, \ldots$$

e *per induzione* si può pensare che esse varranno in generale per qualunque potenza di $a+b$: ma bisogna dimostrare rigorosamente che tali regole sono generali, e all'uopo si ricorre ad un metodo di dimostrazione che viene adoperato non di rado nella matematica.

Supporremo che le regole precedenti siano state verificate fino ad un certo esponente n; e dimostreremo che se le regole valgono per la potenza n^{sima} del binomio, esse varranno pure per la potenza seguente $(n+1)^{sima}$. — Posto che le regole siano vere per l'esponente n, lo sviluppo di $(a+b)^n$ formato secondo quelle regole sarà:

$$\Big\{ (a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,b^2 + $$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}\,b^3 + \dots b^n \Big\}$$

e per formare la potenza seguente $(a+b)^{n+1}$ basterà moltiplicare il polimonio precedente per $a+b$. Eseguendo la moltiplicazione:

$$a^n + n\,a^{n-1}\,b + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,b^2 +$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}\,b^3 + \dots b^n$$

$$\times\,(a+b)$$

$$a^{n+1} + n\,a^n\,b + \frac{(n\,n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-1}\,b^2 +$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-2}\,b^3 + \dots + a\,b^n$$

$$a^n\,b + n\,a^{n-1}\,b^2 + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,b^3 + \dots b^{n+1}$$

$$a^{n+1} + (n+1)\,a^n\,b + \Big\{\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} + n\Big\}\,a^{n-1}\,b^2 +$$

$$+\Big\{\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\Big\}\,a^{n-2}\,b^3 + \dots + b^{n+1}$$

ed eseguendo la riduzione dei termini simili, osservando che per sommare le frazioni bisogna ridurle allo stesso denominatore, troveremo:

$$\frac{n(n-1)}{1.2}+n=\frac{n(n-1)+2n}{1.2}=\frac{(n+1)n}{1.2},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3},$$

e così per gli altri coefficienti; talchè si ottiene

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)a^n b+\frac{(n+1)n}{1.2}a^{n-1}b^2$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}a^{n-2}b^3+\ldots+b^{n+1}$$

e si vede che le regole precedenti sono tutte soddisfatte in questo sviluppo di $(a+b)^{n+1}$. Dunque se le regole enunciate si verificano fino all'esponente n, esse si verificano fino ad $n+1$; ma le abbiamo verificate per l'esponente 6, dunque esse sono vere anche per 7, ma se sono vere per 7 lo sono per 8, quindi per 9, ecc. e in generale per una potenza qualunque.

La formola dello sviluppo della potenza qualunque del binomio o formola di Newton è quindi:

$$(a+b)^n=a^n+n\,a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots b^n$$

che vale per numeri a e b affatto qualunque,. per n intero e positivo.

48. Osservazioni sulla formola di Newton.

a) Nella formola precedente si vede che i coefficienti sono dati in forma di frazioni:

$$\frac{n}{1},\quad \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2},\quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

Esse hanno al numeratore numeri interi consecutivi incominciando da n e decrescenti, e al denominatore altrettanti numeri interi consecutivi crescenti cominciando da 1. Così per $(a+b)^{18}$ i coefficienti dello sviluppo sono:

$$\frac{18}{1},\quad \frac{18\,.\,17}{1\,.\,2},\quad \frac{18\,.\,17\,.\,16}{1\,.\,2\,.\,3},\quad \frac{18\,.\,17\,.\,16\,.\,15}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},\ldots$$

Tali frazioni però sono apparenti e si riducono sempre a numeri interi, per la proposizione di aritmetica che un prodotto di m numeri interi consecutivi è sempre divisibile per il prodotto dei primi m numeri.

b) Dallo sviluppo di $(a+b)^n$ o della potenza di una somma, si deduce facilmente lo sviluppo di $(a+b)^n$ o della potenza di una differenza. Si cambi in $a+b$, b in $-b$, e la somma $a+b$ si cambia nella differenza $a-b$. Ma se cambiamo nello sviluppo di Newton b in $-b$, ricordando che per il § 45 le potenze pari di $-b$ sono positive e le dispari negative, viene:

$$(a-b)^n = a^n - n\, a^{n-1}\, b +$$
$$+ \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\, a^{n-2}\, b^2 - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, a^{n-3}\, b^3$$
$$+ \ldots \pm b^n$$

dove nell'ultimo termine va preso il segno + o — secondo che l'esponente n è pari o dispari.

Esempi:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 - 4\,a\,b^3 + b^4$$

. . . .

Come si vede, alla regolo IV del § 47 va sostituita l'altra, che i segni dello sviluppo di $(a-b)^n$ sono alternati, conservandosi le altre cinque regole.

49. Esponente zero. L'esponente per la sua definizione stessa deve essere un numero intero e positivo: epperò l'esponente *zero* non può avere da per sè alcun significato. Però si è convenuto di attribuire all'esponente *zero* il significato fissato dalla formola

$$a^0 = 1.$$

Così:

« Qualunque quantità affetta dall' esponente *zero* vale *uno.* »

Ed ecco da quale considerazione siamo condotti a stabilire questa convenzione:

Sappiamo che

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

per $m > n$. Se applichiamo questa regola anche al caso di $m = n$, troviamo

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

ed a^0, come si è detto, non ha per sè alcun significato. Ma d'altra parte qualunque sia a

$$\frac{a^m}{a^m} = 1\,;$$

quindi è naturale di convenire che sia

$$a^0 = 1.$$

Non bisogna però dimenticare che questa formola esprime non un teorema, ma una semplice convenzione.

50. Esponenti negativi. Come si è detto, l'esponente per la sua definizione stessa non può essere negativo, e perciò una espressione come a^{-5} non ha per sè alcun significato. Però si è trovato conveniente d'introdurre nel calcolo anche gli esponenti negativi, dando loro il significato espresso dalla formola

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

o in parole:

« Una quantità affetta da un esponente negativo è uguale ad una frazione avente per numeratore l'unità e per denominatore la stessa quantità collo stesso esponente cambiato di segno. »

Questa è una convenzione cui si è condotti dall'osservazione seguente:

Sappiamo che

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

per $m > n$. Se applichiamo questa regola anche al caso di $m < n$, troviamo

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

dove $m - n$ ha un valore negativo che dirò $-p$; quindi

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{-p}$$

dove a^{-p} per sè stessa non ha alcun significato. Ma d'altra parte la frazione $\frac{a^m}{a^n}$ si può semplificare sopprimendo m fattori a al numeratore, ed altrettanti al denominatore. Così:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^p}$$

essendo

$$n - m = p;$$

onde da una parte, per la regola generale,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{-p},$$

dall'altra, per riduzione della frazione,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^p}$$

perciò è naturale di convenire che sia

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Anche questa formola esprime una convenzione e non un teorema. Mercè questa convenzione e quella del paragrafo precedente si potrà dire che in tutti i casi per dividere due potenze della stessa lettera si sottraggono gli esponenti; così avendosi da dividere

$$a^{20}\, b^{17}\, c^{23}$$

per

$$a^{32}\, b^{13}\, c^{29}$$

il risultato sarà

$$a^{-12}\, b^{4}\, c^{-6}$$

equivalente, per la convenzione fatta, a

$$\frac{b^4}{a^{12}\, c^6}.$$

50. *bis.* La regola fondamentale di calcolo degli esponenti positivi si è che per moltiplicare due potenze della stessa lettera si sommano gli esponenti. La stessa regola si estende anche agli esponenti negativi. Sia infatti

$$a^{-m} \times a^{-n}:$$

abbiamo per convenzione

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

dunque

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^{m+n}};$$

ma per la convenzione fatta

$$\frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$$

onde

$$a^{-m} \times a^{-n} = a^{-(m+n)}.$$

Analogamente valgono per gli esponenti negativi le altre regole dimostrate a § 43 per gli esponenti positivi.

CAPITOLO IX.

Calcolo dei radicali.

51. Radici; valori di un radicale, radicali simili. « Si chiama radice m^{sima} di una quantità a e si indica con

$$\sqrt[m]{a}$$

una seconda quantità che innalzata alla m^{sima} potenza riproduce a. »

La scrittura $\sqrt[m]{a}$ sta dunque ad esprimere quel tal numero: cioè si ha per definizione

$$(\sqrt[m]{a})^m = a. \qquad \text{(I)}$$

Su questa scrittura (I) che equivale alla definizione, si fonda tutta la teoria dei radicali.

Se poniamo

$$\sqrt[m]{a} = x \qquad \text{(II)}$$

sarà

$$x^m = a \qquad \text{(III)}$$

e le due scritture (II) e (III) sono equivalenti

Il numero m è l'*indice* del radicale: l'*indice* 2 si sottintende.

Un'espressione algebrica che contiene lettere sotto un radicale dicesi *irrazionale*; $a^2\sqrt[3]{b}$ è una espressione irrazionale.

Due espressioni irrazionali o due radicali si dicono *simili* quando contengono radicali collo stesso indice e sotto il segno lettere uguali con uguali esponenti; così

$$8\sqrt[3]{a^2 b}, \qquad 11\sqrt[3]{a^2 b}$$

sono simili; invece

$$8\sqrt[3]{a^2 b}, \qquad 8\sqrt[3]{a\, b^2}$$

non sono simili, come non sono simili

$$5\sqrt[3]{a}, \qquad 7\sqrt{a}.$$

Si possono *ridurre* per via di somma o di sottrazione radicali simili: non mai invece radicali

che non siano simili. Così:

$$24\sqrt[3]{a b^2} - 11\sqrt[3]{a b^2} = 13\sqrt[3]{a b^2};$$

la riduzione si è potuta eseguire perchè i radicali sono simili; così

$$m\sqrt[3]{a b} + n\sqrt[3]{a b} = (m + n)\sqrt[3]{a b};$$

invece le espressioni

$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}, \quad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}.$$

non si possono ridurre, perchè contengono radicali non simili.

52. Valori algebrici dei radicali. In aritmetica dove si considerano soli numeri positivi, un radicale ha sempre un valore determinato, intero, frazionario o incommensurabile. Ma in algebra si deve tener conto anche dei segni, epperciò vanno distinti quattro casi:

1.° *L'indice del radicale è pari, la quantità sotto il segno è positiva.* Sia $\sqrt[2n]{a}$: questo esprime un numero x che innalzato alla $2n^{sima}$ potenza produce a. Ma

$$x^{2n} = (-x)^{2n};$$

dunque la radice d'indice pari di un numero positivo ha due valori eguali, ma di segno contrario. Si scrive perciò, per es.

$$\sqrt[4]{625} = \pm 5.$$

2.° *L'indice è pari, la quantità sotto il segno è negativa.*

Sia, per esempio, $\sqrt{-36}$: quest'operazione ha per oggetto di trovare un numero che moltiplicato per sè stesso dia -36: ma questo numero non può esistere nè fra i positivi, poichè

$$(+6) \cdot (+6) = +36,$$

nè fra i negativi, poichè

$$(-6) \cdot (-6) = +36:$$

dunque $\sqrt{-36}$ esprime un'operazione impossibile coi numeri di cui disponiamo per ora. I numeri che innalzati al quadrato o ad una potenza pari dànno numeri negativi, appartengono ad una nuova specie di numeri detti *immaginari.*

3.° *L'indice è dispari e la quantità sotto il segno è positiva.* In tal caso si vede, per la regola dei segni della moltiplicazione, che il radicale ha un valore unico positivo; così:

$$\sqrt[3]{8} = +2$$

4.° *L'indice è dispari e la quantità sotto il segno è negativa.* In tal caso il radicale ha un valore unico negativo; così:

$$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

53. Radice di un prodotto, d'una frazione, di una potenza, di una radice. Nei paragrafi che

seguono si tratta esclusivamente dei valori positivi dei radicali. *a*) « Per estrarre la radice di un prodotto basta estrarre la radice dei singoli fattori. »

Formola:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{c}. \qquad (a)$$

A dimostrare questa regola, o ciò che è lo stesso, a dimostrare l'eguaglianza di valore delle due scritture

$$\sqrt[n]{abc}$$

e

$$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{c}$$

mostreremo che innalzandole ambedue alla potenza n^{sima} si ottengono eguali risultati. Ora

$$\left(\sqrt[n]{a\,b\,c}\right)^n = a\,b\,c$$

per definizione (§ 5) e per il teorema *d* a § 44

$$\left(\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{c}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \left(\sqrt[n]{c}\right)^n = a\,b\,c,$$

c. d. d.

b) « Per estrarre la radice n^{sima} di una frazione basta estrarre la radice n^{sima} dei due termini. »

Formola:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Per dimostrare l'eguaglianza di queste due quantità dimostreremo che le potenze n^{sime} sono eguali; infatti per definizione

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$$

e (vedi *e*, § 44)

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

c. d. d.

c) « Per estrarre la radice da una potenza, si divide (quando ciò è possibile) l'esponente della potenza per l'indice del radicale. »

Formola:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (c)$$

Sia m divisibile per n, ed $\dfrac{m}{n} = q$, onde $n\,q = m$.

Dico che

$$\sqrt[n]{a^m} = a^q$$

Infatti, innalzando queste due quantità alla potenza n, sarà

$$(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$$

e (§ 44, *c*)

$$(a^q)^n = a^{nq} = a^m$$

c. d. d.

Esempio:

$$\sqrt[5]{a^{15}} = a^3, \ \sqrt[3]{a^{24}} = a^8.$$

Osservazione. Avendosi da estrarre la radice di una potenza quando l'esponente è superiore all'indice ma non divisibile per esso, si può procedere come segue. Sia

$$\sqrt[7]{a^{52}}.$$

Si scompone 52 in $49 + 3$; $a^{52} = a^{49+3} = a^{49} . a^3$.

$$\sqrt[7]{a^{52}} = \sqrt[7]{a^{49} . a^3} = \sqrt[7]{a^{49}} . \sqrt[7]{a^3}$$

ma

$$\sqrt[7]{a^{49}} = a^7$$

onde

$$\sqrt[7]{a^{52}} = a^7 \sqrt[7]{a^3}.$$

d) « Per estrarre la radice m^{sima} della radice n^{sima} di un numero, si estrae la radice $m \times n^{sima}$ da quel numero. »

Formola:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \qquad (d)$$

Innalziamo queste due quantità alla potenza mn: la seconda si riduce ad

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a:$$

la prima si può innalzare prima alla potenza m, poi alla potenza n, che è come innalzare alla potenza $m\,n$, e si ha

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \sqrt[n]{a},$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

c. d. d.

54. Semplificazione dei radicali. *Teorema.* « Non si altera il valore di un radicale moltiplicando (o dividendo) l'indice del radicale e l'esponente della quantità sotto il segno per uno stesso numero. »

Formola:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad (e)$$

Dico che le potenze $n\,p$ di queste due quantità sono eguali.

Infatti

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np}$$

si ottiene innalzando prima alla potenza n, poi alla potenza p: ora

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$$

$$(a^m)^p = a^{mp};$$

mentre per definizione

$$\left(\sqrt[np]{a^{mp}}\right)^{np} = a^{mp},$$

c. d. d.

Da questo teorema segue la regola, che

« Per semplificare un radicale si dividono l'indice e l'esponente per il loro massimo comun divisore. »

Esempio:

$$\sqrt[32]{a^{64}} = a^2, \quad \sqrt[64]{a^{32}} = \sqrt{a},$$

$$\sqrt[24]{a^{15}} = \sqrt[8]{a^5},$$

$$\sqrt[12]{a^{20}\, b^{32}\, c^{48}} = a\, b^2\, c^4 \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b^2}.$$

55. Riduzione dei radicali allo stesso indice. « Per ridurre più radicali allo stesso indice basta moltiplicare l'indice di ogni radicale e l'esponente della rispettiva quantità sotto il segno per il prodotto degli indici di tutti gli altri radicali. »

Tale operazione conduce evidentemente a radicali aventi tutti lo stesso indice, e non altera il valore dei radicali per il teorema del paragrafo precedente.

Esempio. Abbiasi

$$\sqrt[5]{a^7}, \quad \sqrt[4]{a^3}, \quad \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[5]{a^7} = \sqrt[5\cdot4\cdot3]{a^{7\,.\,4\,.\,3}} = \sqrt[60]{a^{84}}$$

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[5\cdot4\cdot3]{a^{5\,.\,3\,.\,3}} = \sqrt[60]{a^{45}}$$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[5\cdot4\cdot3]{a^{5\,.\,4}} = \sqrt[60]{a^{20}}.$$

Questa operazione è soggetta alle stesse semplificazioni della riduzione delle frazioni allo stesso denominatore. Si può prendere per indice comune

di più radicali qualsiasi multiplo comune degli indici, e in particolare il minimo multiplo.

Esempio. I tre radicali.

$$\sqrt[10]{a},\ \sqrt[12]{b},\ \sqrt[20]{c}$$

equivalgono a

$$\sqrt[60]{a^6},\ \sqrt[60]{b^5},\ \sqrt[60]{c^3}.$$

Come applicazione si possono dare le due seguenti regole:

a) Per moltiplicare fra loro più radicali, se essi hanno lo stesso indice si estrae la radice del prodotto delle quantità sotto il segno. Così

$$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc},$$

infatti questa non è altro che la formola (a) del § 53.

Se i radicali non hanno lo stesso indice, essi si riducono prima allo stesso indice e si torna al caso precedente.

Esempio:

$$\sqrt[10]{a}\,.\,\sqrt[12]{b}\,.\,\sqrt[20]{c} = \sqrt[60]{a^6}\ \sqrt[60]{b^5}\ \sqrt[60]{c^3} = \sqrt[60]{a^6\,b^5\,c^3}$$

b) Per dividere due radicali, se hanno lo stesso indice si estrae la radice del quoziente delle quantità sotto il segno:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ :$$

questa è la formola (*b*) del § 53; se hanno indici diversi si riducono allo stesso indice, e si torna al caso precedente.

Esempio:

$$\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[7]{a^4}}=\frac{\sqrt[35]{a^{21}}}{\sqrt[35]{a^{20}}}=\sqrt[35]{\frac{a^{21}}{a^{20}}}=\sqrt[35]{a}.$$

56. Esponenti frazionari. Un esponente frazionario non ha da per sè alcun significato, l'esponente dovendo per la sua definizione essere un numero intero. Si conviene però che

« Un numero innalzato ad un esponente frazionario rappresenti la radice d'indice uguale al denominatore, di quel numero innalzato ad una potenza indicata dal numeratore; »

ossia il significato dell'esponente frazionario è indicato dalla formola:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a_m}.$$

Si è condotti a stabilire questa definizione dalla formola (*c*) del § 53, generalizzando quella formola che è dimostrata solo per il caso di m divisibile per n.

Stabilita questa convenzione si può abbandonare nel calcolo il segno radicale e sostituirvi l'esponente frazionario: così invece di

$$\sqrt[5]{1024},\ \sqrt[n]{a},\ \sqrt[3]{m^5},$$

si scriverà

$$1024^{\frac{1}{5}}, \quad a^{\frac{1}{n}}, \quad m^{\frac{5}{3}};$$

si vede con ciò come la semplificazione di un radicale si riduca alla semplificazione di una frazione, la riduzione di più radicali allo stesso indice alla riduzione di più frazioni allo stesso denominatore, ecc.

Però, per giustificare l'introduzione nel calcolo di questi esponenti frazionari, conviene mostrare che la formola fondamentale del calcolo delle potenze

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

è valida anche per essi.

Dico cioè che

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

Infatti per la convenzione fatta

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[q]{a^p}$$

e riducendo questi radicali allo stesso indice

$$\sqrt[n]{a^m} . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} . \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} . a^{np}};$$

ma

$$a^{mq} . a^{np} = a^{mq+np}$$

onde

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}},$$

c. d. d.

Le altre regole del calcolo delle potenze sono valide anche per gli esponenti frazionari.

PARTE SECONDA

EQUAZIONI DI PRIMO E DI SECONDO GRADO

SEZIONE I.

TEORIA DELLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

CAPITOLO X.

Preliminari. — Risoluzione delle equazioni di 1° grado ad una incognita.

57. Definizioni. La scrittura algebrica che serve ad indicare che due espressioni hanno lo stesso valore si dice *eguaglianza*; il segno dell'eguaglianza è (=); l'espressione a sinistra del segno (=) è il *primo membro* e l'espressione a destra è il *secondo membro* dell'eguaglianza.

Le eguaglianze si distinguono in *identità* ed *equazioni*. Un'*identità* è un'eguaglianza o evidente per sè stessa, o soddisfatta qualunque siano i numeri particolari che si sostituiscono al posto delle lettere che vi entrano.

Cosi:

$$3 = 3, \quad 7 + 5 = 4 + 8,$$
$$9 - (5 + 4) = 0, \quad a + b = b + a;$$

così pure

$$(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2$$

sono identità. Le identità esprimono talvolta l'enunciato di un *teorema.*

Un'*equazione* invece è un'eguaglianza che è verificata solo se al posto di alcune lettere che vi entrano (e che si dicono *incognite* dell'equazione) si sostituiscono valori numerici determinati e che si dicono *soluzioni* dell' equazione stessa.

Così

$$4\,x+3=23$$

è un'equazione; infatti essa è verificata (cioè il 1.° membro diventa identico al secondo) solo se in luogo di x pongo il valore 5; $x=5$ sarà dunque la soluzione di quell'equazione.

Risolvere un'equazione vuol dire trovarne le soluzioni.

Un'equazione è la traduzione, in linguaggio algebrico, dell'enunciato di un problema: le incognite delle equazioni sono le quantità richieste nel problema.

Un'equazione è completamente risoluta quando si giunge, in seguito a convenienti trasformazioni, ad ottenere l'incognita *isolata* in un membro, cioè senza coefficiente nè esponente, e nell'altro membro soli termini conosciuti.

Si usa di rappresentare le incognite colle ultime lettere dell'alfabeto x, y, z. Se nelle equa-

zioni entrano quantità che si riguardano come conosciute, ma di cui non è fissato il valore numerico, esse si sogliono denotare colla lettera a, b, c,... l, m, n,...

Le equazioni si classificano a seconda del loro grado e del numero delle incognite: e conviene definire che cosa sia precisamente il *grado* di una equazione.

Un'equazione ad una incognita sola si dice del grado n^{simo} quando l'esponente più elevato dell'incognito è n, posto però che l'equazione non contenga l'incognita nè in denominatore, nè sotto un radicale, cioè posto che l'equazione sia *intera* e *razionale.*

Un'equazione a più incognite si dice del grado n quando fatta la somma degli esponenti delle incognite nei vari termini, la massima somma risulta eguale ad n, supposto ancora che l'equazione sia *intera* e *razionale.*

Così l'equazione

$$8x^5 + 2 = 9x^3$$

è del 5.° grado; l'equazione

$$9x^2y^3 - 2xy = 4x^4y - 5$$

è pure del 5.° grado; invece non si può dichiarare senz'altro il grado delle equazioni

$$8x^3 - \frac{2}{x} = 5, \quad \frac{9}{x} + \frac{4}{x} = 3$$

$$x + \sqrt{x} = 14, \quad \sqrt{x^3y} + 4 = 7xy^2,$$

perchè non sono razionali od intere.

L'algebra elementare si occupa della risoluzione delle equazioni di 1.° e 2.° grado: nell'algebra complementare s'insegna a risolvere le equazioni del 3.° e del 4.° La risoluzione dell'equazione di 5.° grado richiede cognizioni di analisi superiore; non si sanno risolvere le equazioni di grado superiore al 5.° che in casi particolari.

58. PRINCIPII GENERALI RELATIVI ALLE EQUAZIONI, E LORO CONSEGUENZE. Due equazioni che hanno le medesime soluzioni si dicono *equivalenti. Principio I.* « Aggiungendo o togliendo una stessa quantità ai due membri di una equazione si ottiene un'equazione equivalente. »

Cosi l'equazione

$$4x + 3 = 23$$

è soddisfatta da $x = 5$, ed è del pari soddisfatta l'equazione

$$4x + 23 = 43,$$

e l'altra

$$4x - 2 = 18.$$

Conseguenza. « Trasportando un termine da un membro di un'equazione nell'altro, purchè si cambi il segno di quel termine, si ottiene una equazione equivalente. »

Abbiasi l'equazione

$$ax + b = c$$

e si tolga b ai due membri; verrà

$$ax + b - b = c - b,$$

ossia

$$ax = c - b$$

ed il termine b che si trovava nel primo membro col segno $+$ figura trasportato nel secondo col segno $-$. Così nell'equazione

$$a x^2 - 5 = b x$$

si aggiunga 5 ai due membri, verrà

$$a x^2 - 5 + 5 = b x + 5,$$

ossia

$$a x^2 = b x + 5$$

ed il termine -5 che si trovava nel 1.° membro è trasportato nel 2.° col segno cambiato.

Principio II. « Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per una stessa quantità (purchè questa quantità non sia nè possa diventare nulla) si ottiene una equazione equivalente.

Così l'equazione

$$4 x + 3 = 23$$

è soddisfatta da $x = 5$, e sarà pure verificata da $x = 5$ l'equazione

$$\frac{4}{3} x + 1 = \frac{23}{3}$$

o

$$28 x + 21 = 161.$$

Non si può dividere o moltiplicare un'equazione per un numero che sia o possa diventare zero.

Per esempio l'equazione

$$x^2 - 1 = 3 x - 3$$

è soddisfatta da $x = 1$: ma se divido i due membri per $x - 1$, viene

$$x + 1 = 3$$

che non è soddisfatta da $x = 1$.

Conseguenza I. « Si possono togliere i fattori comuni a tutti i termini di un'equazione. »

Così all'equazione

$$32\, x^2 - 48\, x = 16$$

si può sostituire l'altra più semplice

$$2\, x^2 - 3\, x = 1.$$

Conseguenza II. « Si possono far sparire i denominatori in una equazione. »

Sia l'equazione

$$\frac{x}{5} - \frac{1}{7} = \frac{x}{3} - 2:$$

moltiplico tutta l'equazione per $5 . 7 . 3$, il che non altera la soluzione dell'equazione: ed ottengo

$$\frac{5 . 7 . 3\, x}{5} - \frac{5 . 7 . 3}{7} = \frac{5 . 7 . 3\, x}{3} - 2 . 5 . 7 . 3$$

e semplificando ed eseguendo,

$$21\, x - 15 = 35\, x - 210,$$

equazione equivalente alla prima, ma scevra di denominatori.

Sia l'equazione

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12} - \frac{x}{3}:$$

moltiplico tutta l'equazione per 12 e trova

$$\frac{12\,x}{4}-\frac{12}{6}=\frac{12\,.\,7}{12}-\frac{12\,.\,x}{3}$$

o semplificando,

$$3\,x-2=7-4\,x.$$

Da cui la regola:

« Per far sparire i denominatori da un'equazione si moltiplica tutta l'equazione per un multiplo comune dei denominatori. A multiplo comune si può prendere il prodotto dei denominatori; è preferibile il loro minimo multiplo. »

Conseguenza III. « Si possono cambiare tutti i segni in un'equazione. »

Infatti cambiare i segni di un'equazione altro non è che moltiplicarne tutti i termini per -1.

Così dall'equazione

$$-3\,x+5=-7\,x-3$$

si ricava, moltiplicando tutta l'equazione per -1

$$3\,x-5=7\,x+3.$$

59. Risoluzione dell'equazione di 1.° grado ad una incognita. Abbiasi l'equazione

$$\frac{x}{6}-\frac{1}{12}=\frac{x}{9}+\frac{5}{4}. \qquad (1)$$

Risolvere quest'equazione significa, come si è detto, trovare quel numero, o quei numeri, che sostituiti ad x rendono il primo membro identico al secondo.

Incomincio dal far sparire i denominatori (principio 2.°, conseguenza 2.ª) moltiplicando tutta l'equazione per 36, ed ottengo

$$6\,x - 3 = 4\,x + 45 \qquad (2)$$

Trasporto — 3 nel 2.° e $4\,x$ nel 1.° membro, cambiando i loro segni (princ. 1.°, conseguenza) e trovo

$$6\,x - 4\,x = 45 + 3 \qquad (3)$$

e riducendo i termini simili,

$$2\,x = 48. \qquad (4)$$

Divido tutta l'equazione per 2:

$$x = 24\,; \qquad (5)$$

ed ora l'incognita è *isolata* nel primo membro ed il secondo contiene soli numeri conosciuti, cioè l'equazione è risoluta e la sua soluzione è $x = 24$. Difatti ponendo 24 al posto di x nell'equazione primitiva (1) ed eseguendo le operazioni si trova l'identità

$$\frac{47}{12} = \frac{47}{12}.$$

Le operazioni fatte su questa equazione particolare si possono ripetere su tutte le altre: e si è così condotti alla seguente

Regola generale: « Per risolvere un'equazione di primo grado ad una incognita:

« 1.° Si fanno sparire i denominatori.

« 2.° Si trasportano i termini conosciuti tutti

in un membro, i termini contenenti l'incognita tutti nell'altro.

« 3.° Si eseguisce la riduzione dei termini simili.

« 4.° Si divide tutta l'equazione per il coefficiente dell'incognita. »

60. Equazione generale di 1.° grado ad una incognita. Qualunque equazione di 1.° grado ad una incognita conterrà nel primo membro termini coll'incognita e termini conosciuti e così nel 2.° membro: e riducendo i termini simili nei due membri, l'equazione verrà a contenere 4 termini; e la sua forma generale, cioè il *tipo* cui si potranno ridurre tutte le equazioni di 1.° grado ad un'incognita sarà

$$ax + b = cx + d, \qquad (1)$$

dove a, b, c, d, sono numeri conosciuti, che nelle varie equazioni particolari potranno avere qualsiasi valore numerico. Applicando la regola generale:

$$ax - cx = d - b$$
$$(a - c)\,x = d - b$$

e

$$x = \frac{d - b}{a - c}. \qquad (2)$$

Per esempio, l'equazione

$$2x - 5 = x + 4$$

è un caso particolare dell'equazione (1) e l'equazione (1) vi si riduce ponendo

$$a = 2,\ b = -5,\ c = 1,\ d = 4;$$

la formola (2) applicata a questo caso dà

$$x = \frac{4+5}{2-1} = 9.$$

61. Discussione dell'equazione di 1.° grado ad una incognita. L'equazione di primo grado ad una incognita ammette dunque una sola soluzione, che è espressa in forma di frazione il cui numeratore è $d-b$, ed il denominatore $a-c$. Ora una frazione ha sempre un significato ben determinato, e può essere positiva, negativa o nulla, purchè il suo denominatore non sia zero. Invece le frazioni:

$$\frac{m}{0} \text{ e } \frac{0}{0}$$

non hanno alcun significato determinato; ed in quei casi in cui i coefficienti a, b, c, d dell'equazione ci portano ad una soluzione

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

della forma $\frac{m}{0}$ o $\frac{0}{0}$, vi è dubbio circa il significato di tale soluzione: simili casi vanno perciò attentamente discussi.

I) Sia l'equazione tale che x prenda la forma $\frac{0}{0}$. È necessario per questo che sia

$$d = b, \text{ e } a = c,$$

e in tale ipotesi l'equazione è

$$ax + b = ax + b,$$

cioè si riduce ad una identità, ed è soddisfatta qualunque sia il valore che si ponga al luogo di x. Perciò quando la soluzione prende la forma $\frac{0}{0}$, l'equazione è ***indeterminata*** o soddisfatta da qualunque numero, e si può dire pertanto che $\frac{0}{0}$ è il ***simbolo dell' indeterminazione.***

II) Sia l'equazione tale che la sua soluzione prenda la forma

$$\frac{m}{0}$$

dove m è un numero diverso da zero. Questa frazione avente per denominatore lo zero non ha significato, e per interpretare questo simbolo occorre ricorrere all'equazione. Se la soluzione

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

è $\frac{m}{0}$, ciò vuol dire che $a = c$ e d è diverso da b, ossia l'equazione è

$$a\,x + b = a\,x + d.$$

Ma questa scrittura espressa in parole suona: « Qual'è il numero x che moltiplicato per a e aggiunto ad un numero dato b, dà lo stesso risultato che moltiplicato per a e aggiunto ad un numero diseguale d? » E chiaro che un tale problema è impossibile, qualunque sia il numero x, e perciò il simbolo $\frac{m}{0}$ si dirà *simbolo d'impossibilità.*

Osservazioni. a) Una frazione della forma $\frac{0}{m}$ non ha nulla d'eccezionale e ha per valore *zero*. Se dunque in un'equazione

$$x = \frac{d - b}{a - c} = \frac{0}{m}$$

ossia $d = b$, e a è diverso da c, la soluzione dell'equazione sarà

$$x = 0.$$

Così l'equazione

$$a\,x + b = c\,x + b.$$

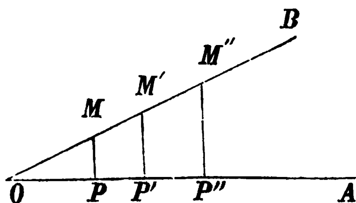
ha per soluzione $x = 0$.

b) Il simbolo $\frac{m}{0}$, che abbiamo detto simbolo d'impossibilità, si dice anche *simbolo dell'infinito* (e si indica col segno ∞). Per spiegare cosa s'intenda precisamente con questo modo di dire, stabiliremo che:

« Una grandezza variabile si dice *tendere all'infinito* quando essa può assumere valori grandi quanto si voglia, cioè maggiori di qualunque numero assegnato. »

Per esempio se si considera la serie dei numeri primi, i numeri di questa serie divengono infiniti, cioè superiori a qualunque numero che si possa assegnare. Così se si considera un angolo AOB e le perpendicolari MP, $M'P'$, $M''P''$,... che si ponno abbassare dai punti di un lato dell'angolo sull'altro lato, queste perpendicolari

tendono (coll'allontanarsi dei punti M, M', M'', dal vertice dell'angolo) all'infinito, cioè divengono superiori a qualunque lunghezza.



Ciò posto, una frazione il cui denominatore diventa ognora più piccolo acquista valori tali da superare qualunque grandezza e si dice perciò diventare infinita.

Per esempio la serie di frazioni

$$\frac{4}{10}, \frac{4}{1}, \frac{4}{0,1}, \frac{4}{0,01}, \frac{4}{0,001}, \frac{4}{0,0001}, \frac{4}{0,00001} \cdots$$

in cui i denominatori vanno decrescendo, equivale a

$$\frac{4}{10}, 4, 40, 400, 4000, 40000, 400000, \text{ecc.},$$

dove le frazioni vanno crescendo e diventano tanto maggiori quanto più piccolo diventa il denominatore. Perciò se in una frazione il denominatore non è esattamente nullo, ma va diventando sempre più piccolo, la frazione diventa sempre più grande e si dice diventare infinita. Ma se il denominatore è assolutamente nullo, allora la frazione non ha più alcun significato.

62. Modo di far sparire i radicali da una equazione. Quando in una equazione si contiene un radicale, questo si fa sparire isolando prima il radicale, poscia innalzando l'equazione alla potenza indicata dall'indice del radicale. Limitandosi al caso dei radicali quadratici che occorrono più di frequente, si vede essere necessario di isolare il radicale, che altrimenti ricomparirebbe nei doppi prodotti che si hanno quando s'innalza una somma al quadrato. Dopo fatti sparire i radicali si può riconoscere il grado dell'equazione e risolverla se è di primo grado. Conviene però verificare se le soluzioni che si trovano convengono all'equazione proposta; esse potrebbero esservi anche estranee, perchè innalzando un'equazione al quadrato si ottiene una nuova equazione che contiene le soluzioni non solo della prima, ma di un'altra ancora. Così, se da

$$A = B$$

deduciamo innalzando al quadrato,

$$A^2 = B^2,$$

si deve notare che quest'ultima equazione poteva anche ottenersi innalzando al quadrato

$$A = -B,$$

di cui contiene dunque le soluzioni.

Esempio. Sia da risolvere

$$2 + \sqrt{x^2 + 1} = x - 4:$$

isolo prima il radicale,

$$\sqrt{x^2+1}=x-6;$$

innalzo i due membri al quadrato,

$$x^2+1=x^2-12\,x+36;$$

riduco i termini simili

$$12\,x=35,$$

$$x=\frac{35}{12}$$

e sostituendo nell'equazione proposta

$$2+\sqrt{\left(\frac{35}{12}\right)^2+1}=\frac{35}{12}-4$$

o eseguendo

$$2+\frac{37}{12}=\frac{35}{12}-4$$

che non è esatta; invece si ha

$$2-\frac{37}{12}=\frac{35}{12}-4:$$

ossia $\frac{35}{12}$ è soluzione dell'equazione

$$2-\sqrt{x^2+1}=x-4.$$

CAPITOLO XI.

Risoluzione e discussione dei problemi di primo grado ad una incognita.

63. Risoluzione dei problemi per mezzo delle equazioni. Le equazioni servono alla risoluzione dei problemi. Proposto che sia un problema, si tenta di tradurne l'enunciato con una equazione che gli equivalga perfettamente; si risolve, coi metodi dati dall'algebra, l'equazione così stabilita: infine si discute la soluzione trovata, cioè si guarda se essa soddisfa o meno al problema e in quali casi essa sia ammissibile. La risoluzione algebrica di un problema consta adunque di tre parti:

I. Mettere il problema in equazione, o *intavolare* l'equazione corrispondente all'enunciato.

II. Risolvere l'equazione.

III. Discutere le soluzioni trovate.

Non si possono dare regole generali per intavolare l'equazione di un problema; però bisogna ritenere i seguenti precetti:

1.° Distinguere chiaramente nell'enunciato le quantità note dalle incognite.

2.° Rappresentare l'incognita (o le incognite) colle lettere x (y, z...)

3.° Indicare sopra l'incognita le operazioni che servirebbero per verificare il problema se il valore dell'incognita fosse conosciuto: si giun-

gerà sempre in tal modo ad ottenere due quantità che dovranno essere uguali e che separate col segno ($=$) daranno l'equazione del problema.

64. Esempi di problemi. *Esempio 1.°* « La somma di due numeri è 46, la loro differenza 18, quali sono questi numeri? »

Indico con x il minore dei due numeri, il maggiore sarà quello che insieme ad x dà 46, cioè $46 - x$. Se i due numeri x e $46 - x$ fossero quelli che verificano l'enunciato, la differenza sarebbe 18: questa scrittura

$$46 - x - x = 18$$

dà pertanto l'equazione del problema: risolvendo

$$-2x = -28$$

$$x = 14, \quad 46 - x = 32.$$

Generalizzando: « La somma di due numeri è un numero dato a, la differenza un numero dato b, quali sono questi numeri? »

Indico con x il minore dei due numeri, il maggiore sarà $a - x$, e si ha l'equazione

$$a - x - x = b$$

$$2x = a - b$$

$$x = \frac{a-b}{2}$$

$$a - x = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Dunque se la somma di due numeri è a e la

differenza b, i due numeri saranno

$$\frac{a+b}{2} \text{ e } \frac{a-b}{2},$$

il che dà una regola facile a ritenersi e ad esprimersi in parole.

Esempio 2.° « Un padre ha 34 anni e suo figlio ne ha 10; fra quanti anni l'età del padre sarà tripla di quella del figlio? »

Sia x il numero degli anni necessario affinchè ciò avvenga. Fra x anni il padre avrà anni $34+x$, il figlio avrà anni $10+x$ e se x fosse il numero cercato, $34+x$ dovrebbe essere uguale a tre volte $10+x$; per cui l'equazione del problema sarà

$$34+x=3(10+x)$$
$$34+x=30+3x$$
$$-2x=-4$$
$$x=2.$$

L'età del padre sarà tripla di quella del figlio fra 2 anni, come è facile verificare.

65. Condizioni implicite. Talvolta l'equazione corrispondente ad un problema è possibile ed ammette una soluzione determinata, mentre il problema è impossibile, cioè quella soluzione non può convenire all'enunciato per condizioni contenute implicitamente in esso. Per esempio se in un problema l'incognita è un certo numero di persone e l'equazione corrispondente all'enunciato ha per soluzione un numero frazionario, quella soluzione può convenire all'equa-

zione, ma non al problema, il quale richiede che la soluzione sia un numero intero.

66. Interpretazione delle soluzioni negative. Un'equazione può anche essere soddisfatta da un numero negativo; ma qual'è il significato della soluzione negativa di un problema? In alcuni casi, la soluzione negativa pnò indicare impossibilità; in altri essa si può interpretare con una lieve modificazione nell'enunciato del problema, ricordando le cose dette a § 16 sul significato concreto dei numeri negativi.

Esempio: « Un padre ha 39 anni, il figlio ne ha 15: fra quanti anni l'età del padre sarà tripla di quella del figlio? »

Ragionando come a § 64, si trova per equazione del problema:

$$39 + x = 3\,(15 + x)$$

e risolvendo:

$$x = -3;$$

si ha una soluzione negativa che significa essere il problema impossibile, almeno coll'attuale enunciato. Ma osserviamo che il numere cercato esprimeva anni in avvenire e se questi si contano con numeri positivi, vanno contati coi numeri negativi gli anni in passato. Per ciò il numero -3 indica 3 anni in passato. È appunto la soluzione che si troverebbe se si risolvesse il seguente problema:

« Un padre ha 39 anni, suo figlio ne ha 15; quanti anni fa l'età del padre era tripla di quella del figlio? »

CAPITOLO XII.

Equazioni di 1.° grado a due incognite.

67. I SISTEMI DI EQUAZIONI. *Sistema di equazioni simultanee* è l'insieme di più equazioni che devono essere soddisfatte contemporaneamente dagli stessi valori delle incognite (soluzioni).

Due sistemi di equazioni diconsi *equivalenti* se sono soddisfatti dalle stesse soluzioni.

Un'equazione sola con due incognite è *indeterminata*: cioè è soddisfatta da un numero infinito di soluzioni. Infatti si può dare un valore arbitrario ad una delle incognite e risolvere l'equazione rispetto all'altra.

Così avendo

$$3x + 4y = 25$$

fatto

$$x = 1, \text{ ne risulta } y = \frac{22}{4},$$

$$x = 2 \quad » \quad » \quad y = \frac{19}{4},$$

$$x = 3 \quad » \quad » \quad y = 4; \text{ ecc.}$$

Due equazioni con una sola incognita costituiscono in generale un sistema *incompatibile*, cioè che non può essere soddisfatto: infatti risolvendo una delle equazioni, non vi sarà ragione perchè il valore che ne risulta soddisfi anche

l'altra, a meno che le due equazioni non abbiano una speciale relazione fra di loro.

Esempio. Dato il sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3\,x - 4 = 14 \\ 2\,x - 7 = 30 \end{array}\right\}$$

il valore $x = 6$ che soddisfa alla prima non soddisfa alla seconda equazione. Un problema che dà luogo ad un equazione con 2 incognite si dice indeterminato, a 2 equazioni con una sola incognita si dice troppo determinato.

La stessa osservazione si è generalizzata ed ha portato ad enunciare che:

« Un sistema di n equazioni con più di n incognite è indeterminato.

« Un sistema di n equazioni con meno di n incognite è in generale incompatibile.

« Affinchè un sistema di più equazioni sia compatibile e deteminato è in generale necessario e sufficiente che esso contenga tante equazioni quante sono le incognite. »

68. Principî relativi alle equazioni simultanee. *Principio I.* Dato un sistema di equazioni, se ad una di esse si sostitutisce l'equazione ottenuta sommando o sottraendo due o più delle altre membro a membro, il sistema che si ottiene è equivalente al primitivo.

Così al sistema di equazione che rappresenteremo in modo abbreviato con

$$\left.\begin{array}{l} A = B \\ C = D \\ E = F \end{array}\right\}$$

si può sostituire l'altro equivalente

$$\left.\begin{array}{r} A = B \\ C = D \\ C + E = D + F \end{array}\right\}$$

o anche

$$\left.\begin{array}{r} A = B \\ C = D \\ m\,C + n\,E = m\,D + n\,F \end{array}\right\}$$

dove m ed n sono numeri qualunque.

Principio II. « In un sistema di equazioni si può ad una di esse sostituire quella che si ottiene risolvendola rispetto ad una delle incognite, e alle altre quelle che si hanno sostituendovi per quella incognita il valore dato dalla prima. In tal modo si ha un sistema equivalente a quello proposto.

Cioè dal sistema

$$\begin{array}{lcl} A = B & & A\,(x, y, z) = B\,(x, y, z) \\ C = D & \text{ossia} & C\,(x, y, z) = D\,(x, y, z) \\ E = F & & E\,(x, y, z) = F\,(x, y, z) \end{array}\Bigg\}$$

si può dedurre dalla prima equazione x risolvendola considerando per un istante y e z come numeri conosciuti,

$$x = M\,(y, z)$$

e ponendo in luogo di x il suo valore nelle altre

due equazioni, si ottiene il sistema seguente:

$$\left.\begin{array}{r} x = M(y, z) \\ C'(y, z) = D'(y, z) \\ E'(y, z) = F'(y, z) \end{array}\right\}$$

Questi due principi convenientemente applicati servono alla risoluzione di tutti i sistemi simultanei di primo grado. Ci occuperemo anzitutto dei sistemi di due equazioni con due incognite.

69. Risoluzione per sostituzione di un sistema di due equazioni a due incognite. Per risolvere un tal sistema è necessario *eliminare* una delle incognite, cioè farla sparire onde avere una equazione con una sola incognita: ciò si ottiene col metodo indicato dal 2.° principio; l'eliminazione eseguita in tal modo si dice *eliminazione per sostituzione.* — Sia il sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 26 \\ 6x - y = 7. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Risolvendo la prima equazione rispetto ad x, come se y fosse conosciuto, si ricava

$$x = \frac{26 - 4y}{3}$$

e in virtù del secondo principio si può al sistema (1) sostituire

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{26 - 4y}{3} \\ 6 \cdot \dfrac{26 - 4y}{3} - y = 7. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Ora si scorge che la seconda equazione contiene la sola incognita y; si potrà dunque risolvere quest'equazione col metodo conosciuto e si troverà

$$y = 5,$$

e al sistema (2) in virtù del principio 2.° si può sostituire l'altro

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{26 - 4 \cdot 5}{3} = 2 \\ y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

e qui le incognite essendo isolate, il sistema si trova risoluto. Il sistema proposto ha dunque per soluzioni

$$y = 5, x = 2,$$

e lo stesso procedimento si può applicare a tutti i sistemi di due equazioni a due incognite.

70. Risoluzione per riduzione di un sistema di due equazioni a due incognite. Esponiamo ora un secondo metodo che si applica talvolta con maggior vantaggio del precedente. Abbiasi il sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 31 \\ x + y &= 13 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

se si sottraggono membro a membro queste due equazioni, si avrà il sistema equivalente (per il 1.° principio)

$$\left.\begin{aligned} 2y &= 18 \\ x + y &= 13 \end{aligned}\right\}$$

da cui

$$\left.\begin{aligned} y &= 9 \\ x + 9 &= 13 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

e finalmente

$$\left.\begin{aligned} y &= 9 \\ x &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ed il sistema è così risoluto.

Questo esempio ci conduce ad osservare che l'eliminazione di un'incognita si può fare facilmente se i coefficienti di questa incognita sono eguali nelle due equazioni: basta sottrarre le equazioni membro a membro se quei coefficienti hanno egual segno, o sommarle se hanno segno contrario. Ora, siccome le soluzioni non si alterano moltiplicando i due membri di una delle equazioni per un numero qualunque, così si potranno sempre scegliere tali moltiplicatori che i coefficienti di una delle incognite nelle due equazioni si riducano eguali.

Esempio: Abbiasi il sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 26 \\ 6x - y &= 7. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Moltiplico la prima equazione per 6, la seconda per 3, ed è evidente che in tal guisa i coefficienti di x saranno uguali nelle due equazioni, ottenendosi così:

$$\left.\begin{aligned} 18x + 24y &= 156 \\ 18x - 3y &= 21 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

e sottraendo

$$27\,y = 135$$

$$y = 5.$$

Trovato il valore di y, si ottiene subito dalla seconda equazione

$$6\,x - 5 = 7$$

$$6\,x = 12, \quad x = 2.$$

Si vede dunque che i coefficienti di un'incognita nelle due equazioni si rendono eguali moltiplicando la prima equazione per il coefficiente dell'incognita nella seconda e viceversa. Si può però, quando i due coefficienti sono numeri *non* primi fra loro, moltiplicare le due equazioni per numeri più semplici, in guisa da ridurre le equazioni ad avere per coefficiente comune di quelle incognite il minimo multiplo dei coefficienti primitivi. Così nel sistema (1) precedente basta moltiplicare la prima equazione per 2 e si ottiene

$$\left.\begin{aligned} 6\,x + 8\,y &= 52 \\ 6\,x - y &= 7 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

da cui colla sottrazione

$$9\,y = 45, \quad y = 5.$$

Il metodo ora esposto si dice di eliminazione per *riduzione.*

71. Riduzione per sostituzione di un sistema generale di due equazioni a due incognite. Un'equazione a due incognite contiene tre specie di

termini non simili fra loro: quei termini che contengono la prima incognita, quelli che contengono la seconda, e i termini conosciuti. Trasportando i termini delle prime due specie nel primo membro, quelli della terza specie nel secondo e riducendo i termini simili, la forma generale di un'equazione di primo grado a due incognite sarà

$$ax + by = c$$

dove a, b, c sono, nei varî casi particolari, numeri conosciuti.

Un sistema a due equazioni di primo grado a due incognite sarà dunque in generale della forma

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c'. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Risolvendo questo sistema per sostituzione, viene

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c - by}{a} \\ a' . \frac{c - by}{a} + b'y &= c' \end{aligned}\right\}$$

o riducendo

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c - by}{a} \\ a'c - a'by + ab'y &= ac' \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c - by}{a} \\ y &= \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{aligned}\right\}$$

e sostituendo per y il valore così trovato nella frazione che dà il valore di x:

$$x = \frac{c - b\,\dfrac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}}{a}$$

o semplificando, supposto a non nullo

$$x = \frac{c\,a\,b' - c\,b\,a' - b\,a\,c' + b\,c\,a'}{a\,(a\,b' - b\,a')}$$

$$= \frac{a\,(c\,b' - b\,c')}{a\,(a\,b' - b\,a')} = \frac{c\,b' - b\,c'}{a\,b' - b\,a'}.$$

Le soluzioni del sistema (1) sono dunque date dalle frazioni:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c\,b' - b\,c'}{a\,b' - b\,a'} \\ y &= \frac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

71 *bis*. Risoluzione del medesimo sistema col metodo di riduzione. Il medesimo sistema generale

$$\left.\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c \\ a'\,x + b'\,y &+ c' \end{aligned}\right\}$$

si può anche risolvere col metodo di eliminazione per riduzione. Moltiplichiamo la prima equazione per a', la seconda per a, e viene

$$a\,a'\,x + b\,a'\,y = c\,a'$$
$$a\,a'\,x + a\,b'\,y = a\,c'$$

e sottraghiamo la prima dalla seconda: viene

$$(a\,b' - b\,a')\,y = a\,c' - c\,a'$$

ossia

$$y = \frac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}.$$

Moltiplichiamo invece la prima per b', la seconda per b, e viene

$$\left.\begin{array}{l} a\,b'\,x + b\,b'\,y = c\,b' \\ b\,a'\,x + b\,b'\,y = b\,c' \end{array}\right\}$$

e sottraghiamo la seconda dalla prima: viene

$$(a\,b' - b\,a')\,x = c\,b' - b\,c'$$

onde

$$x = \frac{c\,b' - b c'}{a\,b' - b\,a'}$$

soluzioni che coincidono con quelle trovate nel paragrafo precedente.

72. Regola di Cramer. Sulle formole

$$x = \frac{c\,b - b\,c'}{a\,b' - b\,a'},\quad y = \frac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}$$

che verificano il sistema (1), si possono fare alcune osservazioni.

Intanto si vede che: « i valori di x e di y sono frazioni aventi lo stesso denominatore, il quale si forma colla differenza dei prodotti in croce dei coefficienti delle equazioni (1). »

« Si vede di più che il numeratore di x si forma

dal denominatore sostituendovi al posto dei coefficienti a, a' di x i rispettivi termini noti c, c' e il numeratore di y sostituendovi al posto dei coefficienti b, b' di y i rispettivi termini noti c, c'. »

Queste osservazioni valgono per il sistema generale e quindi per qualunque sistema particolare di due equazioni di primo grado a due incognite; esse permettono di scrivere le soluzioni di un sistema senza bisogno dell'applicazione d'alcun processo di risoluzione. La regola enunciata di sopra è dovuta al matematico tedesco Cramer.

Avendosi per esempio il sistema

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 5y = 21 \\ 5x + 3y = 47 \end{array} \right\}$$

i valori di x ed y saranno frazioni il cui denominatore sarà

$$3 \times 3 - 5 \times (-5) = 9 + 25 = 34;$$

il numeratore di x si formerà ponendo in luogo di 3 e 5, rispettivamente 21 e 47, e sarà

$$3 \times 21 - 47 \times (-5) = 298$$

e il numeratore di y ponendo in luogo di -5 e 3 rispettivamente 21 e 47 e sarà

$$3 \times 47 - 5 \times 21 = 36,$$

per cui

$$x = \frac{298}{34}, \; y = \frac{36}{34}.$$

73. Discussione del sistema generale di solu-

ZIONI. Le equazioni

$$\left.\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c \\ a'\,x + b'\,y &= c' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

formano, per quanto si è veduto, un sistema verificato dalle frazioni

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b\,c' - c\,b'}{a\,b' - b\,a'} \\ y &= \frac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

onde il sistema (1) ammette una soluzione unica per x e per y: i valori di x, y possono poi, se a, b, c,... sono numeri razionali, essere interi o fratti, positivi o negativi, o anche nulli.

L'unico caso di eccezione, che va studiato attentamente, si presenta quando si supponga nullo il denominatore comune delle frazioni 2), perchè sappiamo che una frazione il cui denominatore è nullo non può avere significato.

La presente discussione verrà divisa in tre parti:

a) « Se il denominatore comune

$$a\,b' - b\,a'$$

delle frazioni è nullo, ed è pure nullo uno dei numeratori, sarà nullo necessariamente anche l'altro. »

Dimostrazione. Essendo per ipotesi

$$a\,b' - b\,a' = 0$$

ed uno dei numeratori nullo, per esempio

$$c\,b' - b\,c' = 0,$$

ne risulta

$$a\,b' - b\,a', \quad c\,b' - b\,c'$$

onde

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'},$$

e per conseguenza

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

onde

$$a\,c' = c\,a'$$

o

$$a\,c' - c\,a' = 0,$$

c. d. d.

Segue da ciò che se una delle incognite assume la forma $\frac{m}{0}$, assume la stessa forma anche l'altra e se una delle incognite assume la forma $\frac{0}{0}$, assume la stessa forma anche l'altra.

b) « In secondo luogo, se le due incognite prendono la forma $\frac{0}{0}$, ciò significa che il sistema proposto è indeterminato. »

Dimostrazione. Se le incognite prendono la forma $\frac{0}{0}$, ciò significa che nullo il denomina-

tore comune ed uno dei numeratori e quindi anche l'altro, ossia:

$$a\,b' - b\,a' = 0$$
$$a\,c' - c\,a' = 0$$

oppure

$$a\,b' = b\,a', \quad a\,c' = c\,a'$$

e quindi

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Il valore di queste tre frazioni uguali rappresentiamolo con h; si avrà

$$\frac{a}{a'} = h, \quad \frac{b}{b'} = h, \quad \frac{c}{c'} = h,$$

donde

$$a = h\,a', \quad b = h\,b', \quad c = h\,c'.$$

Tornando al sistema proposto

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{array}\right\}$$

e sostituendo per a, b, c, i valori trovati, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} h\,a'\,x + h\,b'\,y = h\,c' \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{array}\right\}$$

e dividendo tutto per h nella prima equazione

$$\left.\begin{array}{l} a'\,x + b'\,y = c' \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{array}\right\}$$

Adunque se le incognite si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$, il sistema non contiene in realtà due equazioni con due incognite, ma una stessa equazione scritta due volte: esso è dunque indeterminato, ed il simbolo $\frac{0}{0}$ è ancora un simbolo d'interminazione.

c) « Finalmente se le due incognite hanno la forma $\frac{m}{0}$, il sistema è impossibile, cioè le due equazioni fra loro incompatibili. »

Dimostrazione. Avendo le soluzioni del sistema la forma $\frac{m}{0}$, il denominatore del sistema sarà nullo, ma saranno diversi da zero i numeratori: cioè sarà

$$a\,b' - b\,a' = 0$$

onde

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

ed indicando con h il valore di queste frazioni,

$$\frac{a}{a'} = h, \quad \frac{b}{b'} = h$$

ossia

$$a = a'\,h, \quad b = b'\,h$$

(e si noti che non è c uguale a $c'\,h$ altrimenti il rapporto $\frac{c}{c'}$ sarebbe uguale ad $\frac{a}{a'}$ e $\frac{b}{b'}$ e quindi

i numeratori di x ed y sarebbero nulli, contro l'ipotesi.)

Le equazioni del sistema dato sono dunque

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{array}\right\}$$

o sostituendo per a e b i valori trovati

$$\left.\begin{array}{l} a'\,h\,x + b'\,h\,y = c \\ a'\quad x + b'\quad y = c' \end{array}\right\}$$

e dividendo per h:

$$\left.\begin{array}{l} a'\,x + b'\,y = \dfrac{c}{h} \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{array}\right\}$$

Essendo $\dfrac{c}{h}$ diverso da c', come si è osservato, queste equazioni esprimono che la somma

$$a'\,x + b'\,y$$

deve uguagliare due numeri diversi per gli stessi valori di x, y: il che è impossibile, cioè le due equazioni

$$a'\,x + b'\,y = \frac{c}{h}$$

e

$$a'\,x + b'\,y = c'$$

sono fra loro imcompatibili. Il simbolo $\dfrac{m}{o}$ si dovrà perciò ritenere come simbolo d'impossibilità.

74. Risoluzione di problemi con sistemi di due equazioni a due incognite. Circa alla risoluzione di problemi con sistemi di equazioni a due (o più) incognite, non vi è da aggiungere alcuna avvertenza generale alle cose dette a § 63; importa solo che il problema sia tale da dar luogo a tante equazioni quante sono le incognite: se le equazioni che si possono ricavare dall'enunciato sono in numero minore delle incognite, il problema è indeterminato; se si ricavano più equazioni che incognite il problema è troppo determinato, cioè generalmente impossibile.

Nell'intavolare le equazioni di un problema, si può a piacimento aumentare il numero delle incognite aumentando anche il numero delle equazioni. Così il problema risoluto a § 64 si può esprimere col seguente sistema di equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \end{array}\right\}$$

equivalente alla equazione unica scritta al paragrafo citato.

CAPITOLO XIII.

Equazioni di primo grado a più incognite.

75. Eliminazione per sostituzione. Affinchè un sistema di più equazioni di primo grado con più incognite sia determinato e possibile, o in altri termini affinchè risulti un valore unico e

determinato per ciascuna delle incognite, è necessario che il sistema contenga tante equazioni quante sono le incognite; abbiamo già notato che se il sistema contiene più incognite che equazioni esso è indeterminato, se più equazioni che incognite esso è generalmente impossibile.

Per risolvere un sistema di n equazioni con altrettante incognite, si deduce da una delle equazioni il valore di una delle incognite come se le altre fossero conosciute, e si sostituisce il valore così trovato per quella incognita in tutte le altre equazioni, che vengono allora a contenere un'incognita di meno. La risoluzione del sistema proposto si riduce in tal modo a quella di un sistema di $n-1$ equazioni ad $n-1$ incognite, il quale si riconduce alla sua volta e collo stesso metodo ad un sistema di $n-2$ equazioni ad $n-2$ incognite, e così via finchè si giunge ad un sistema di 2 equazioni a 2 incognite, che si sa risolvere. Questo processo viene detto di *eliminazione per sostituzione*, ed il seguente problema ce ne somministra un esempio.

« Un numero è composto di quattro cifre la cui somma è 24: la cifra delle migliaia è uguale al doppio di quelle delle decine meno il terzo di quelle delle unità, quella delle decine è la metà di quella delle centinaia e di quella delle unità insieme, infine il numero cercato meno il numero scritto a rovescio dà il numero 6174. Quali sono le quattro cifre? »

Le equazioni del problema sono, secondo le ipotesi dell'enunciato

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + v &= 24 \\ x &= 2z - \frac{v}{3} \\ y + v &= 2z \\ 1000x + 100y + 10z + v - 1000v &- \\ - 100z - 10y - x &= 6174. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dalla terza si ricava il valore di $2z$ e portandolo nelle altre tre, viene un sistema di 3 equazioni a 3 incognite:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + y + v + 2v &= 48 \\ x &= y + v - \frac{v}{3} \\ 6174 = 1000x + 100y + 5y + 5v + v &- \\ - 1000v - 50y - 50v - 10y - x & \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

e riducendo

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 3v &= 48 \\ 3x &= 3y + 2v \\ 999x + 45y - 1044v &= 6174. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Dalla seconda equazione si cava il valore di $3y$ e lo si sostituisce alle altre due, e viene

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3x - 2v + 3v &= 48 \\ 999x + 45x - 30v - 1044v &= 6174 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sistema di due equazioni a due incognite, che

ordinato dà

$$\left.\begin{aligned} 5\,x + v &= 48 \\ 1044\,x - 1074\,v &= 6174 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

da cui

$$x = 9, \quad v = 3$$

e sostituendo nella seconda e nella terza equazione del sistema (1),

$$z = 5, \quad y = 7;$$

il numero cercato è dunque

9753.

Si può osservare che il problema sarebbe stato impossibile se non si fossero trovati numeri interi e minori di 9 per soluzione, così richiedendo implicitamente l'enunciato.

76. Metodo dei coefficienti indeterminati. Il metodo detto « dei coefficienti indeterminati » consiste nel moltiplicare tutte le equazioni tranne la prima per numeri indeterminati, poi sommare le equazioni e finalmente determinare i moltiplicatori indeterminati colla condizione che siano zero i coefficienti di tutte le incognite meno una; resta così da risolvere un sistema di $n - 1$ equazioni avente per $n - 1$ incognite quei moltiplicatori, ed una equazione con una sola incognita, che risulta dalla somma delle equazioni del primitivo sistema.

Esempio. Abbiasi il sistema

$$\left.\begin{aligned} 2\,x + 4\,y + 5\,z &= 62 \\ x - y + z &= 7 \\ x + y + z &= -1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Moltiplicando la seconda equazione per un numero indeterminato λ e la terza per un numero indeterminato λ', viene

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y + 5z = 62 \\ \lambda x - \lambda y + \lambda z = 7\lambda \\ \lambda' x + \lambda' y - \lambda' z = -\lambda'. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

E sommando:

$$\left.\begin{array}{l} x(2 + \lambda + \lambda') + y(4 - \lambda + \lambda') + \\ \quad + z(5 + \lambda - \lambda') = 62 + 7\lambda - \lambda'. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Allo scopo di determinare λ e λ', si pone la condizione che i coefficienti di y e di x siano zero, e si ottengono le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} 2 + \lambda + \lambda' = 0 \\ 4 - \lambda + \lambda' - 0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

e l'equazione (3) si riduce a

$$z(5 + \lambda - \lambda') = 62 + 7\lambda - \lambda'. \qquad (5)$$

Il sistema (4) che è

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + \lambda' = -2 \\ \lambda - \lambda' = \quad 4 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

si risolve facilmente e dà

$$\lambda = 1, \quad \lambda' = -3;$$

l'equazione (5) diviene allora

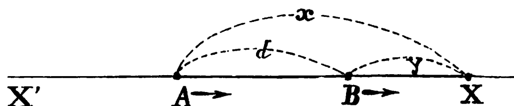
$$z(5 + 1 + 3) = 62 + 7 + 3,$$
$$z = 8$$

e trovato z, si scorge facilmente che

$$x = 3, \quad y = 4.$$

77. Riassunto della teoria delle equazioni di 1.° grado coll'applicazione ad un problema. Il seguente problema, la cui soluzione può servire d'esempio in molti casi analoghi, ci servirà utilmente a riepilogare le cose principali dette fin qui sulle equazioni di primo grado.

Problema: « Due mobili percorrono con moto uniforme una strada rettilinea nello stesso senso: partono allo stesso istante da due punti A e B:



il primo fa a chilomètri e il secondo ne fa b al-all'ora: si domanda a quale distanza dai punti A e B questi mobili verranno ad incontrarsi, d essendo la distanza AB? »

Sia X il punto d'incontro, x la strada fatta dal primo, cioè AX; y quella fatta dal secondo: si ha

$$x - y = d. \qquad (1)$$

Di più, se il 1.° fa a chilom. in un'ora, farà 1 chilom. in $\frac{1}{a}$ d'ora, x chilom in $\frac{x}{a}$; così il

2.° farà y chilom. in $\frac{y}{b}$, onde sarà

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \qquad (2)$$

e risolvendo

$$x = \frac{d\,a}{a-b}, \quad y = \frac{d\,b}{a-b}. \qquad (3)$$

Discussione. In questi valori il numeratore è sempre positivo; il denominatore è positivo o negativo secondo che a è maggiore o minore di b, e quando $a = b$ si ha il denominatore zero che come sappiamo, è caso di eccezione.

a) Sia $a > b$. Allora le frazioni (3) hanno il numeratore ed il denominatore positivi, quindi le soluzioni sono possibili; avviene l'incontro in un punto determinato a destra di B. Ed invero se $a > b$, il primo mobile corre più velocemente del secondo e lo dove raggiungere. E tanto maggiore sarà la differenza fra a e b, tanto più vicino a B avverrà l'incontro.

b) Sia $a < b$; le frazioni (3) sono negative e si potrebbe dire che il problema è impossibile, perchè se B va più velocemente di A, è impossibile che A raggiunga B a destra. Ma le soluzioni negative che si trovano si possono interpretare riguardandole come distanze contante non verso destra, ma verso sinistra; e quelle frazioni cambiate di segno rispondono al seguente problema:

« Due mobili dopo aver percorso con moto uniforme una strada rettilinea giungono nel medesimo istante in A e B, l'uno colla velocità a e

l'altro colla velocità b: a quale distanza da A e B è avvenuto l'incontro?

Le equazioni di questo problema sarebbero

$$y - x = d, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

e la soluzione è precisamente

$$x = \frac{d\,a}{b - a}, \quad y = \frac{d\,b}{b - a}.$$

c) Sia finalmente $b = a$, o $b - a = 0$; allora x ed y hanno la forma $\frac{m}{0}$ che esprime impossibilità. È chiaro che se i mobili hanno la stessa velocità essi manterranno sempre fra loro la distanza $d = \overline{A\,B}$ e non s'incontreranno mai nè a destra, nè a sinistra di $A\,B$.

Se invece di essere

$$b = a, \text{ o } b - a = 0,$$

fosse $b - a$ piccolissimo, x ed y sarebbero grandissimi e l'incontro avverrebbe ad una grandissima distanza da B; in questo senso si dice che se $b = a$, x ed y sono *infiniti*.

Se $a = b$ e $d = 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ ed il problema è indeterminato. Infatti se i mobili partono insieme (poichè $d = 0$) e colla stessa velocità, essi si troveranno sempre insieme e l'incontro avverrà in tutti i punti della retta.

SEZIONE II.

TEORIA DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

CAPITOLO XIV.

Risoluzione dell'equazione di secondo grado ad una incognita.

78. FORMA GENERALE DELL'EQUAZIONE. Un'equazione ad una sola incognita è del secondo grado quando in essa si trova l'incognita alla seconda e alla prima potenza, l'incognita non comparendo inoltre nè in denominatore, nè sotto un radicale.

Facendo passare tutti i termini nel 1.° membro, riducendo i termini simili ed indicando con a, b, c, tre numeri conosciuti, ogni equazione di 2.° grado si può porre sotto la forma

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad (1)$$

che si dice *forma generale* dell'equazione di secondo grado. Così l'equazione

$$8 - 3\,x^2 + 14\,x + 11 = 7\,x^2 - 9 + 4\,x$$

si può scrivere

$$(-3-7)\,x^2+(14-4)\,x+11+8+9=0$$

ossia

$$-10\,x^2+10\,x+28=0,$$

e l'equazione si ottiene dalla forma generale (1), facendovi

$$a=-10,\quad b=10,\quad c=28.$$

Il coefficiente a si può sempre supporre positivo potendosi cambiare tutti i segni all'equazione (§ 58) se esso è negativo: così l'equazione precedente si può scrivere

$$10\,x^2-10\,x-28=0$$

dove ora

$$a=10,\quad b=-10,\quad c=-28.$$

L'equazione di secondo grado si dice *completa* se tutti i coefficienti di a, b, c sono diversi da zero, e incompleta se uno di questi coefficienti è zero.

79. Equazioni incomplete. L'equazione può essere incompleta per fatto del coefficiente a, o del coefficente b, o del termine noto: quindi si devono distinguere tre casi:

a) Sia $a=0$. L'equazione (1) prende la forma

$$b\,x+c=0;$$

essa si riduce al primo grado e perciò non è d'uopo considerarla.

b) Sia $b=0$. L'equazione (detta allora da

taluni *equazione pura*) diventa

$$a x^2 + c = 0.$$

Dividendo tutta l'equazione per a

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

e posto $-\frac{c}{a} = A$, l'equazione è

$$x^2 = A.$$

L'incognita x è dunque un numero che innalzato al quadrato deve produrre il numero dato A.

Quindi distinguiamo tre casi:

I) A è positivo, per esempio $A = 36$. Il numero 6 innalzato al quadrato produce 36, dunque 6 è una soluzione dell'equazione, ma -6 produce pure 36; dunque -6 è una seconda soluzione, epperciò l'equazione

$$x^2 = 36$$

ammette due soluzioni (o radici) che sono

$$x = \pm \sqrt{36},$$

cioè

$$x = \pm 6.$$

II) A è nullo: l'equazione è

$$x^2 = 0.$$

Il solo numero che innalzato al quadrato dia per risultato 0 è lo zero, dunque l'equazione ha la sola soluzione (o radice)

$$x = 0.$$

III) A è negativo. Sia per esempio $A = -81$. Nessun numero innalzato al quadrato può produrre il numero negativo -81; perciò l'equazione

$$x^2 = -81$$

non ha alcuna soluzione, vuoi positiva, vuoi negativa. Ma se introduciamo nel calcolo nuovi numeri, la cui definizione sia che: «innalzati al quadrato essi devono dare origine a numeri negativi,» e questi nuovi numeri si dicono *numeri immaginari*, allora

$$\pm\sqrt{-81}$$

rappresenterà un numero immaginario che innalzato al quadrato dà -81. Si converrà di applicare a questi nuovi numeri le stesse regole di calcolo che valgono per gli ordinari numeri, che per contrapposto si diranno d'ora in poi *reali*.

Così:

$$4, -\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{5}{7}}, 0{,}818181\ldots,$$

sono numeri reali, mentre

$$\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-81}, \quad \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

sono numeri immaginari.

L'equazione incompleta di secondo grado

$$x^2 = -81$$

ha dunque le due *radici immaginarie*

$$x = \pm\sqrt{-81}.$$

Riassumendo, l'equazione

$$x^2 = A$$

ha 2 soluzioni o radici reali se A è positivo, 2 soluzioni o radici immaginarie se A è negativo ed una soluzione 0 se A è zero; per una ragione che verrà chiarita in seguito, diremo però che vi sono due soluzioni nulle se $A = 0$.

c) Infine se l'equazione è incompleta per fatto del terzo termine, essa sarà

$$a\,x^2 + b\,x = 0$$

ossia

$$x\,(a\,x + b) = 0.$$

Questo è prodotto di due fattori x ed $a\,x + b$, il quale deve essere zero: ma un prodotto non può essere zero che se è zero uno dei suoi fattori, e quindi dovrà essere

$$x = 0$$

o

$$a\,x + b = 0.$$

Quest'ultima è un'equazione di primo grado, che ha per soluzione

$$x = -\frac{b}{a}:$$

dunque anche l'equazione

$$a x^2 + b x = 0$$

ha le due soluzioni, o radici,

$$x = 0,\ x = -\frac{b}{a}.$$

80. Cenno sul calcolo dei numeri immaginari. Abbiamo detto che:

« Un numero immaginario è un numero che innalzato al quadrato dà origine ad un numero negativo. »

E abbiamo convenuto che:

« Le regole di calcolo degli ordinari numeri o numeri reali, si estenderanno anche ai numeri immaginari. »

Ciò posto, abbiasi il numero immaginario

$$\sqrt{-81}.$$

Si può scrivere

$$\sqrt{-81} = \sqrt{(-1).81} = \sqrt{-1}\,.\sqrt{81}$$

e $\sqrt{81}$ è un numero reale 9: per cui

$$\sqrt{-81} = \sqrt{-1}\,.9.$$

Così

$$\sqrt{-\frac{5}{7}} = \sqrt{(-1).\frac{5}{7}} = \sqrt{-1}.\ \sqrt{\frac{5}{7}}$$

dove $\sqrt{\frac{5}{7}}$ è un numero reale.

Pertanto ogni numero immaginario si può riguardare come prodotto di un numero reale (che si può quindi o valutare esattamente o calcolare coll'approssimazione che si vuole) moltiplicato per la radice di -1. Questa quantità $\sqrt{-1}$ s'indica di solito con i e si chiama *simbolo immaginario* o *unità immaginaria*: ed è definita da

$$i^2 = -1.$$

Si ha:

$$i = \sqrt{-1},\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -\sqrt{-1},$$

$$i^4 = +1,\quad i^5 = \sqrt{-1} = i \text{ ecc.}$$

Un numero formato da una parte reale ed una immaginaria, come

$$3 + \sqrt{-25}$$

si chiama numero complesso. Ogni numero complesso si può scrivere

$$a + ib$$

dove a e b sono numeri reali: così

$$3 + \sqrt{-25} = 3 + 5\sqrt{-1} =$$
$$= 3 + i5.$$

I numeri complessi, che contengono i numeri reali come caso particolare, trovano grandissima e necessaria applicazione nelle parti più elevate della matematica.

81. Risoluzione dell'equazione completa. Con-

sideriamo l'equazione completa

$$a x^2 + b x + c = 0 \qquad (1)$$

e dividiamo tutta l'equazione per a; si avrà

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

ed indichiamo le frazioni note $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ con p e q; si avrà

$$x^2 + p x + q = 0. \qquad (2)$$

Per trovare le soluzioni (o radici) di questa equazione, si osservi che qualunque sia il numero p, il binomio

$$x^2 + p x$$

si può sempre riguardare come formato dai due primi termini del quadrato di $x + \frac{p}{2}$ ed essendo

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + p x + \frac{p^2}{4},$$

per completare il quadrato occorre aggiungere ad $x^2 + p x$ il termine $\frac{p^2}{4}$. Aggiungendo e togliendo $\frac{p^2}{4}$ al primo membro dell'equazione (2) esso non si altera, e si ha

$$x^2 + p x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

ossia

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0,$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$$

ed estraendo la radice da ambo i membri

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

da cui

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad (3)$$

che comprende i due valori distinti

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \\ x'' &= -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

82. Discussione dell'equazione di secondo grado. L'equazione di secondo grado ammette dunque due soluzioni o radici date dalle formole precedenti; volendo esaminare se queste formole sono sempre ammissibili, si debbono distinguere tre casi:

I. La quantità $\frac{p^2}{4}-q$ posta sotto il radicale sia positiva, cioè sia

$$\frac{p^2}{4}>q;$$

la radice quadrata sarà reale, e l'equazione avrà due soluzioni reali e differenti.

II. Sia $\frac{p^2}{4} - q$ nullo, cioè

$$\frac{p^2}{4} = q,$$

la formola (4) diventa

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{0}$$
$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{0}$$

ossia

$$x' = -\frac{p}{2}, \quad x'' = -\frac{p}{2}:$$

l'equazione ha allora una soluzione unica: si suole dire però che vi sono due soluzioni (o radici) eguali

III. Sia per ultimo $\frac{p^2}{4} - q$ negativo, ossia

$$\frac{p^2}{4} < q\,;$$

le radici contengono sotto il radicale una quantità negativa, la radice quadrata sarà immaginaria e le due soluzioni dell'equazione sono numeri complessi.

Esempi: Abbiasi l'equazione

$$x^2 - 8\,x + 12 = 0$$
$$p = -8; \quad q = 12.$$

Applicando le formole (3)

$$x = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\frac{64}{4} - 12}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{4}$$

$$x' = 6;\ x'' = 2:$$

si hanno due radici reali e diseguali; siamo nel 1.° caso.

Abbiasi l'equazione

$$x^2 - 10\,x + 25 = 0$$

$$p = -10,\quad q = 25.$$

Applicando la (3),

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 25}$$

$$x' = 5,\quad x'' = 5;$$

siamo così nel 2.° caso.

Abbiasi l'equazione

$$x^2 + 8\,x + 41 = 0;$$

in questa,

$$p = 8,\quad q = 41$$

e applicando la (3),

$$x = -4 \pm \sqrt{16 - 41};$$

siamo nel 3.° caso e le radici sono i numeri complessi:

$$x = -4 \pm \sqrt{-25}$$

ossia

$$x' = -4 + 5i, \quad x' = -4 - 5i$$

dove

$$i = \sqrt{-1}.$$

Riassumendo, l'equazione

$$x^2 + px + q = 0$$

ha

$$\left.\begin{array}{ll} \text{due radici reali e diseguali se} & \frac{p^2}{4} > q \\ \text{due radici reali ed eguali se} & \frac{p^2}{4} = q \\ \text{due radici complesse se} & \frac{p^2}{4} < q. \end{array}\right\}$$

La quantità $\frac{p^2}{4} - q$, che serve a discernere la natura delle radici dell'equazione di 2.° grado, chiamasi *discriminante* dell'equazione.

83. Risoluzione dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. L'equazione di secondo grado si può anche risolvere lasciandola sotto la forma

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad (1)$$

moltiplichiamo infatti tutta l'equazione per $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0; \qquad (2)$$

osserviamo poi che

$$4a^2x^2 + 4abx$$

sono i due primi termini del quadrato di

$$2\,a\,x + b,$$

poichè

$$(2\,a\,x + b)^2 = 4\,a^2\,x^2 + 4\,a\,b\,x + b^2;$$

se dunque al 1.° membro dell'equazione (1) aggiungiamo e togliamo b^2, viene

$$4\,a^2\,x^2 + 4\,a\,b\,x + b^2 - b^2 + 4\,a\,c = 0$$

ossia

$$(2\,a\,x + b)^2 - b^2 + 4\,a\,c = 0$$

o

$$(2\,a\,x + b)^2 = b^2 - 4\,a\,c;$$

ma se i due membri di questa equazione sono uguali, saranno uguali anche le loro radici, onde

$$2\,a\,x + b = \pm\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$$

da cui

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \qquad (5)$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ x'' &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

e queste formole generali servono a risolvere qualunque equazione di secondo grado.

Esempio. La formola (5) applicata all'equazione

$$3x^2 - 5x - 4 = 0$$

dà

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \, . \, 3 \, . \, (-4)}}{2 \, . \, 3}$$

ossia

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6}$$

ed essendo

$$\sqrt{73} = 8{,}54$$

coll'approssimazione di un centesimo, sarà

$$x' = \frac{5 + 8{,}54}{6} = \frac{1354}{600} = 2{,}26$$

$$x'' = \frac{5 - 8{,}54}{6} = = - \frac{354}{600} = - 0{,}59.$$

Per la distinzione dei vari casi che può presentare l'equazione (1), si procede come al paragrafo precedente:

I. Se $b^2 - 4ac$ è positivo, le due radici o soluzioni sono reali e diseguali.

II. Se $b^2 - 4ac$ è nullo, le due radici si riducono ad una sola, cioè sono eguali, e precisamente sono

$$x = - \frac{b}{2a} .$$

III. Se $b^2 - 4ac$ è negativo, si hanno due radici complesse.

Così l'equazione:

$$3\,x^2 - 5\,x - 4 = 0$$

ha le radici reali e diseguali,

$$x' = 2,26, \quad x'' = -0,59.$$

L'equazione:

$$4\,x^2 - 12\,x + 9 = 0$$

ha le radici eguali,

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \,.\, 4 \,.\, 9}}{8}$$

$$x' = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, \quad x'' = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

L'equazione

$$5\,x^2 - x + 64 = 0$$

ha per radici

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 5 \times 64 \times 4}}{10}$$

ossia

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-1279}}{10};$$

le radici sono immaginarie, ed essendo

$$\sqrt{1279} = 25,7$$

sarà

$$x' = 0,1 + 3,57\,i, \quad x'' = 0,1 - 3,57\,i.$$

Nell'equazione

$$a x^2 + b x + c = 0$$

il discriminante è

$$b^2 - 4 a c$$

e l'equazione ammette

$$\text{Due radici} \begin{cases} \text{reali e diseguali se} & b^2 > 4 a c \\ \text{reali ed uguali se} & b^2 = 4 a c \\ \text{immaginarie se} & b^2 < 4 a c. \end{cases}$$

Osservazione. La formola (5) si può alquanto semplificare se b è pari. In tal caso si può porre infatti

$$b = 2 b',$$

$$x = \frac{-2 b' \pm \sqrt{4 b'^2 - 4 a c}}{2 a}$$

ossia

$$x = \frac{-2 b' \pm 2 \sqrt{b'^2 - a c}}{2 a}$$

e togliendo il fattore 2 comune ai due termini della frazione,

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - a c}}{a}. \qquad (7)$$

CAPITOLO XV.

Proprietà dell' equazione di secondo grado.

84. Relazioni fra i coefficienti e le radici dell'equazione di secondo grado. Riprendiamo l'equazione di secondo grado sotto la forma:

$$x^2 + p\,x + q = 0.$$

Essa ammette, come si è visto, due soluzioni che d'ora innanzi chiameremo *radici*, e che sono compendiate nella formola

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

o separandole,

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \\ x'' &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \end{aligned} \right.$$

Sommando queste radici si trova

$$x' + x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}$$

ossia

$$x' + x'' = -p.$$

Moltiplicando le due radici:

$$\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$$

$$\frac{p^2}{4}-\frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$+\frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$$

$$\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q,$$

ossia

$$x'\,x''=q;$$

si ha così il seguente

Teorema: « Nell'equazione di secondo grado

$$x^2+p\,x+q=0$$

la somma delle radici è uguale al coefficiente del secondo termine preso col segno cambiato, ed il prodotto delle radici è uguale al termine noto. »

Osservazione 1. Questa proprietà conduce a dire che vi sono *due radici uguali*, anzichè *una radice sola*, nel caso in cui $\frac{p^2}{4}=q$.

Osservazione 2. Nell'equazione

$$a x^2 + b x + c = 0$$

le cui radici sono

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}, \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}, \end{cases}$$

la somma delle radici è

$$x' + x'' = - \frac{b}{a}$$

ed il prodotto

$$x' x'' = \frac{c}{a}.$$

85. Trovare due numeri di cui si conosca la somma ed il prodotto. « Due numeri sono incogniti, ma la loro somma è un numero conosciuto s ed il loro prodotto un numero pure conosciuto P. »

Tali numeri si possono trovare col seguente ragionamento:

Se formiamo l'equazione di secondo grado

$$x^2 - s x + P = 0$$

questa per il teorema del § precedente avrà due radici la cui somma sarà s ed il prodotto P; i due numeri richiesti si troveranno dunque immediatamente risolvendo l'equazione precedente.

Essi sono pertanto

$$x' = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - P}$$

$$x'' = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - P}$$

Se $\frac{s^2}{4} > P$, si hanno due numeri reali diversi che rispondono al problema.

Se $\frac{s^2}{4} = P$, si hanno numeri reali, ma eguali.

Se $\frac{s^2}{4} < P$, si hanno radici immaginarie, cioè il problema è impossibile con numeri reali. Da ciò si deduce che:

« Il prodotto dei due numeri reali non può essere maggiore del quadrato della metà della somma di quei numeri. »

Esempio: Trovare due numeri che abbiano per somma 24 e per prodotto 44.

Questi numeri saranno le radici dell'equazione

$$x^2 - 24x + 44 = 0$$

ossia

$$x = 12 \pm \sqrt{144 - 44}$$

$$= 12 \pm 10$$

$$x' = 22, \quad x'' = 2.$$

86. Riconoscere il segno delle radici senza

RISOLVERE L'EQUAZIONE. Può tornare utile di sapere riconoscere i segni delle radici di un'equazione di 2.° grado senza risolvere l'equazione medesima; ciò si può fare giovandosi del teorema del paragrafo 84.

Fin qui noi abbiamo indicato con p e q numeri qualunque positivi o negativi; ora indicheremo con p e q numeri *positivi*, per cui un'equazione di secondo grado potrà presentare una delle quattro forme seguenti

$$x^2 + p x + q = 0 \qquad (\alpha)$$
$$x^2 + p x - q = 0 \qquad (\beta)$$
$$x^2 - p x + q = 0 \qquad (\gamma)$$
$$x^2 - p x - q = 0 \qquad (\delta)$$

Nella forma (α) il prodotto delle radici è positivo, onde, se sono reali, le radici sono dello stesso segno: la somma delle radici è negativa, dunque le due radici sono negative; però le radici possono essere immaginarie se $\frac{p^2}{4} < q$.

Nella forma (β) il prodotto delle radici è negativo, onde le radici avranno segni diversi; e la loro somma è negativa, per cui la radice che ha il valore maggiore è negativa. Le radici sono sempre reali, perchè sotto il radicale vi è

$$\frac{p^2}{4} - (-q) = \frac{p^2}{4} + q,$$

quantità essenzialmente positiva.

Nella forma (γ) le due radici sono dello stesso segno, e la somma essendo positiva, le due ra-

dici saranno positive. Le radici possono essere anche immaginarie perchè $\frac{p^2}{4}$ può esser $< q$.

Nella forma (γ) le due radici hanno segno contrario, e la somma delle radici essendo positiva, la radice di valore maggiore sarà positiva. Anche in questo caso come nel caso (β) la somma $\frac{p^2}{4} + q$ è positiva e quindi le radici sono necessariamente reali.

87. Scomposizione di un trinomio di secondo grado nei suoi fattori primi. Abbiamo detto che un polinomio ordinato è divisibile per un altro quando il resto della loro divisione è zero. Il polinomio è allora scomposto in due fattori, uno dei quali è il divisore, l'altro il quoziente. Così

$$D = x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 1$$

è divisibile per

$$x^2 + x - 1$$

e si può scrivere

$$D = (x^2 + x - 1) \times (x^3 + 5x^2 + 1).$$

Di più abbiamo detto che un polinomio è primo quando esso non è divisibile per alcun altro.

Un polinomio ordinato per le potenze di una lettera si può sempre scomporre in un prodotto di polinomi primi: ma la dimostrazione di questa verità esce dal campo dell'Algebra elementare; però per i polinomi del secondo grado tale scomposizione si può eseguire fondandosi sulla risoluzione dell'equazione di secondo grado.

Un polinomio (binomio) di primo grado in x è sempre primo.

Un polinomio di secondo grado sarà un trinomio contenente la lettera ordinatrice alla seconda e alla prima potenza ed un termine senza la lettera ordinatrice, talchè la forma generale di un tale polinomio sarà

$$a x^2 + b x + c.$$

Si può raccogliere a scrivendo

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}\right)$$

e posto per brevità

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q$$

il trinomio diventa

$$a\,(x^2 + p\,x + q),$$

e fatta astrazione dal fattore a il polinomio da scomporre sarà

$$x^2 + p\,x + q.$$

Ricorriamo ora all'equazione

$$x^2 + p\,x + q = 0;$$

essa ha due radici x', x'' tali che

$$x' + x'' = -p, \quad x'\,x'' = q$$

ma se noi eseguiamo il prodotto

$$(x - x')\ (x - x'')$$

troviamo

$$x - x'$$
$$x - x''$$
$$x^2 - x\,x'$$
$$- x\,x'' + x'\,x''$$
$$x^2 - x\,(x' + x'') + x'\,x''$$

ossia

$$x^2 + p\,x + q,$$

Dunque il prodotto di fattori primi (binomi di primo grado)

$$(x - x)\;(x - x'')$$

equivale al trinomio

$$x^2 + p\,x + q,$$

e

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x^2 + p\,x + q),$$

equivale ad

$$a\,(x - x')\;(x - x'').$$

Onde la regola

« Ogni trinomio di secondo grado della forma

$$x^2 + p\,x + q$$

equivale ad un prodotto di 2 binomi di primo grado, ognuno dei quali è formato dalla lettera ordinatrice meno una delle radici dell'equazione che si ottiene ponendo il trinomio eguale a zero. »

Esempio. Il trinomio:

$$x^2 - 10\,x + 24$$

posto uguale a zero, dà l'equazione

$$x^2 - 10\,x + 24 = 0$$

le cui radici sono

$$x' = 6,\ x'' = 4;$$

perciò

$$x^2 - 10\,x + 24 = (x - 6)\ (x - 4)$$

come è facile a verificarsi.

88. Conseguenze della scomposizione precedente.

A) Questa proprietà mette una volta di più in evidenza che quando $\frac{p^2}{4} = q$, si deve ritenere che l'equazione ha *due radici uguali*, e non una sola radice.

B) « Un trinomio di secondo grado che posto uguale a zero dà un'equazione colle radici eguali, è un quadrato perfetto. »

Infatti se $x' = x''$, sarà

$$x^2 + p\,x + q = (x - x')^2;$$

si può anche vedere da ciò, che se

$$\frac{p^2}{4} = q,$$

il trinomio è

$$x^2 + p\,x + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

C) « Si scorge dalla scomposizione prece-

dente che un'equazione di secondo grado non può avere più di due radici. »

Infatti se deve essere

$$x^2+px+q=0$$

ossia

$$(x-x')\,(x-x'')=0$$

deve essere $x-x'=0$, cioè $x=x'$, oppure

$$x-x''=0$$

cioè $x=x''$.

D) « Si può sempre formare un'equazione di secondo grado che abbia per radici due numeri presi ad arbitrio, a e b. »

Basta infatti scrivere

$$(x-a)\,(x-b)=0,$$

ossia

$$x^2-(a+b)\,x+a\,b=0.$$

Così l'equazione che avrà per radici 3 e 5 sarà

$$(x-3)\,(x-5)=0,$$

od eseguendo:

$$x^2-8\,x+15=0.$$

89. Risoluzione di alcuni sistemi di equazioni simultanee. Per risolvere un sistema di più equazioni a più incognite di grado superiore al primo, si può sempre tenere il metodo di sostituzione indicato al § 69, ma si giungerà per lo più ad un'equazione *risultante* contenente una sola in-

cognita ad un grado superiore al secondo. Oltre a ciò, questo metodo conduce ad equazioni contenenti radicali, e per farli sparire occorrono spesso calcoli lunghi e laboriosi.

Avendo, per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + 5 \\ 3x^2 + 2y^2 - 4xy = 11. \end{cases}$$

si ricava

$$x = \pm\sqrt{y^2+5}$$

e sostituendo nella seconda,

$$3(y^2+5) + 2y^2 \pm 4\sqrt{y^2+5}\,.\,y = 11$$

equazione ad una incognita ma contenente un radicale; facendolo sparire si giungerebbe ad una equazione di quarto grado che non sappiamo risolvere. Daremo però esempi di alcuni sistemi che si risolvono facilmente con opportuni artifizi di calcolo.

Esempio 1.° « Trovare due numeri conoscendone la somma dei quadrati ed il prodotto. »

Questo problema conduce alle equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$$

Moltiplico la seconda per 2 e la aggiungo e la tolgo alla prima,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b \\ x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (x+y)^2 = a + 2b \\ (x-y)^2 = a - 2b \end{cases}$$

ed estraendo la radice

$$\begin{cases} x + y = \pm\sqrt{a+2b} \\ x - y = \pm\sqrt{a-2b}. \end{cases}$$

Il problema è ora ricondotto a trovare due numeri di cui si conosce la somma e la differenza (vedi § 68) e si ha pertanto

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pm\sqrt{a+2b} \pm\sqrt{a-2b}}{2} \\ x = \dfrac{\pm\sqrt{a+2b} \mp\sqrt{a-2b}}{2} \end{cases}$$

dove i segni vanno combinati in uno dei due seguenti modi:

$$\begin{cases} +, + \\ + - \end{cases} \text{ o } \begin{cases} - - \\ - +. \end{cases}$$

Esempio 2.° « Trovare due numeri conoscendone la somma e la somma dei quadrati. »

Le equazioni del problema sono

$$x^2 + y^2 = a$$
$$x + y = c.$$

Innalzando al quadrato la seconda

$$x^2 + y^2 + 2xy = c^2$$

e da questa sottraendo la prima,

$$2xy = c^2 - a$$

ossia

$$xy = \frac{c^2 - a}{2}$$

Il problema è dunque ricondotto all'altro: trovare due numeri conoscendone la somma ed il prodotto (vedi § 85); tali numeri saranno le radici dell'equazione

$$X^2 - cX + \frac{c^2 - a}{2} = 0$$

da cui

$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

Esempio 3.° « Trovare due numeri conoscendone il prodotto e la somma delle quarte potenze. »

Le equazioni del problema sono

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a \\ xy = b; \end{cases}$$

innalzo la seconda equazione al quadrato e la moltiplico per 2,

$$2x^2y^2 = b^2$$

poscia la somma e la sottraggo colla prima ed ottengo

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = a + 2b^2 \\ x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = a - 2b^2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = a + 2\,b^2 \\ (x^2-y^2)^2 = a - 2\,b^2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \pm\sqrt{a+2\,b^2} \\ x^2-y^2 = \pm\sqrt{a-2\,b^2}\,; \end{cases}$$

considerando ora per un istante x^2 ed y^2 come incognite, di queste conosco la somma e la differenza ed ho (§ 64)

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\pm\sqrt{a+2\,b^2} \pm \sqrt{a-2\,b^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\pm\sqrt{a+2\,b^2} \mp \sqrt{a-2\,b^2}}{2} \end{cases}$$

e finalmente

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\pm\sqrt{a+2\,b^2} \pm \sqrt{a-2\,b^2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\pm\sqrt{a+2\,b^2} \mp \sqrt{a-2\,b^2}}{2}} \end{cases}$$

Per esempio, se

$$\begin{cases} x^4+y^4 = 641 \\ x\,y = 10 \end{cases}$$

si avrà

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\pm\sqrt{841} \pm \sqrt{441}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\pm\sqrt{841} \mp \sqrt{441}}{2}} \end{cases}$$

ossia (essendo $i = \sqrt{-1}$)

$$\begin{cases} x = 5, \quad 5i, \quad -5, \quad -5i \\ y = 2, \quad 2i, \quad -2, \quad -2i \end{cases}$$

90. Equazione biquadratica. Un'equazione di 4.° grado contiene, se è completa, 5 specie di termini, cioè termini di 4.°, 3.°, 2.°, 1.° grado, e termini noti: trasportando nel primo membro tutti i termini e riducendo, essa avrà la forma

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e = 0.$$

La risoluzione di questa equazione appartiene all'Algebra complementare, ma si può in Algebra elementare risolvere l'equazione incompleta che manca dei termini di grado dispari, cioè l'equazione

$$a x^4 + b y^2 + c = 0, \qquad (1)$$

che si chiama *equazione biquadratica.*

Per risolvere quest'equazione, basta sostituire alla quantità incognita x l'altra y legata ad x in modo che sia $x^2 = y$, da cui $x^4 = y^2$; sostituendo nell'equazione biquadratica (1), essa diventa

$$a y^2 + b y + c = 0, \qquad (2)$$

che è un'equazione di 2.° grado.

Risolvendola si avrà:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ma

$$y = x^2,$$

onde

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (3)$$

L'equazione biquadratica ha dunque quattro soluzioni, che, distinte, sono:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ x_3 &= +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ x_4 &= -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

e che sono 2 a 2 eguali e di segno contrario.

Esempio: Sia da risolvere l'equazione

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Posto

$$x^4 = y^2,\ x^2 = y$$

viene

$$y^2 - 13y + 36 = 0,$$

donde

$$y = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = +\sqrt{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}} = +3$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}} = -3$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{13}{2} - \frac{5}{2}} = +2$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{13}{2} - \frac{5}{2}} = -2.$$

91. Risoluzione di un problema di 2.° grado. « Dividere una retta in media ed estrema ragione. »

Sia la retta data $A\,B$ di lunghezza conosciuta a:

A C B

si vuol trovare sopra di essa un segmento $A\,C = x$, tale che

$$\frac{A\,B}{A\,C} = \frac{A\,C}{C\,B}$$

ossia

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

e riducendo allo stesso denominatore

$$a\,(a - x) = x^2$$

$$a^2 - a\,x = x^2$$

$$x^2 + a\,x - a^2 = 0$$

e risolvendo

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2},$$

ma

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

onde

$$\begin{cases} x' = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)\frac{a}{2} \\ x'' = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{5} = -(\sqrt{5} + 1)\frac{a}{2} \end{cases}$$

ed essendo

$$\sqrt{5} = 2{,}236$$

coll'approssimazione di 0,001,

$$\begin{cases} x'' = -a \times 1{,}618 \\ x' = a \times 0{,}618 \end{cases}$$

Da ciò segue che il problema è sempre possibile, essendo una delle radici reale, positiva e minore della retta intera: la sua lunghezza si ottiene moltiplicando la lunghezza a di tutta la retta per il numero incommensurabile 0,618... : esso segmento è dunque maggiore della metà di a.

In quanto all'altro valore x'' che è negativo, esso indica, secondo le nostre convenzioni, un

C' *A* *C* *B*

segmento contato a sinistra di A, e la cui lunghezza si ottiene moltiplicando a per 1,618: ed è tale che

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

cioè soddisfa come soluzione positiva all'equazione

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{x+a}.$$

CAPITOLO XVI.

Teoria delle disuguaglianze.

92. Definizione e proprietà delle disuguaglianze. Una quantità A si dice *maggiore* di un'altra B quando la differenza $A - B$ è positiva, e *minore* quando la differenza è negativa; esse sono uguali quando la differenza è nulla.

Dalla definizione precedente segue:

a) Che una quantità positiva è maggiore di qualunque quantità negativa.

b) Che di due quantità negative la maggiore è quella che ha minore valore assoluto.

c) Che una quantità positiva è maggiore di zero.

Così si ha:

$$\left.\begin{array}{r} 24 > -150 \\ -32 > -412 \\ 43 > 0 \\ -37 < 0 \end{array}\right. \quad \text{perchè} \quad \left\{\begin{array}{l} 24-(-150)=126 \\ -32-(-412)=390 \\ 43-0=43 \\ -37-0=-37. \end{array}\right.$$

La scrittura che esprime essere un'espressione maggiore o minore di un'altra si dice disuguaglianza: la prima espressione è il 1.° membro, l'altra il 2.° membro della disuguaglianza.

Una disuguaglianza può esprimere l'enuciato di un problema, ma di un problema necessariamente indeterminato, come per esempio: « Quali sono i numeri di due cifre nei quali la somma delle cifre è minore di 6? » E può anche servire ad esprimere le condizioni di possibilità di un problema determinato.

Sulle disuguaglianze si possono enunciare le seguenti proposizioni, che non hanno bisogno di dimostrazione:

a) Si può aggiungere o togliere una stessa quantità ai due membri di una disuguaglianza.

b) Si possono sommare membro a membro due o più disuguaglianze dello stesso segno (*ma non sottrarle*).

c) Si può moltiplicare i due membri di una disuguaglianza per uno stesso numero positivo; si può anche dividerli per uno stesso numero positivo.

d) Moltiplicando o dividendo i due membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo, si cangia il senso della disuguaglianza.

Segue da questi principî:

e) Che si può far passare un termine da un membro in un altro di una disuguaglianza, cambiandogli il segno.

f) Che si possono far sparire i denominatori in una disuguaglianza come in una equazione.

93. Risoluzione della disuguaglianza di primo grado. Abbiasi da risolvere la disuguaglianza di primo grado.

$$4x + 5 > 2x + 9$$

che espressa in parole significa:

« Quali sono i numeri che moltiplicati per 4 e aggiunti a 5 dànno un risultato maggiore che moltiplicati per 2 e aggiunti a 9? »

Trasportando $2x$ nel primo membro e 5 nel secondo, viene:

$$4x - 2x > 9 - 5$$
$$2x > 4$$

e dividendo ambo i membri per 2,

$$x > 2$$

che si può enunciare:

« Tutti i numeri maggiori di 2, moltiplicati per 4 e aggiunti a 5 dànno un risultato maggiore che moltiplicati per 2 e aggiunti a 9. »

Il numero 2 soddisfa all'equazione

$$4x + 5 = 2x + 9$$

ed i numeri inferiori a 2 soddisfano alla disuguaglianza

$$4x + 5 < 2x + 9.$$

94. Risoluzione della disuguaglianza di secondo grado. La disuguaglianza di secondo grado, che si può sempre ridurre alla forma

$$a x^2 + b x + c > 0$$

o

$$a x^2 + b x + c < 0$$

serve a rispondere alla seguente domanda:

« Quali sono quei numeri che sostituiti ad x in un trinomio di secondo grado, rendono quel trinomio positivo, o negativo? »

Se a è positivo si può dividere tutto per a senza alterare la disuguaglianza, se a è negativo dividendo per a la disuguaglianza cambia senso ed il segno $>$ si cambia in $<$ e viceversa.

Dividendo per a e posto al solito

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q,$$

siamo condotti a studiare le disuguaglianze

$$x^2 + p x + q > 0$$

o

$$x^2 + p x + q < 0;$$

cioè si vuol trovare quali numeri posti in luogo di x in un dato trinomio lo rendono positivo e quali lo rendono negativo.

Per rispondere a tale domanda converrà distinguere tre casi:

I. Posto

$$x^2 + p x + q = 0$$

si ha un'equazione di secondo grado: abbia questa le sue radici reali e disuguali. Indichiamole con x' ed x'' e sia x' la maggiore.

Abbiamo imparato che il trinomio

$$x^2 + p\,x + q$$

equivale identicamente al prodotto di due fattori di primo grado (§ 87)

$$(x - x')\ \ (x - x'');$$

siamo così condotti a cercare per quali numeri sostituiti ad x il prodotto suddetto è positivo, e per quali negativo.

a) Se per x si sostituisce un numero maggiore di x', questo sarà *a fortiori* maggiore di x''; le due differenze $x - x'$, $x - x''$ saranno positive ed il loro prodotto sarà positivo.

b) Se per x si sostituisce un numero minore di x', ma maggiore di x'', la differenza $x - x'$ sarà negativa, ma $x - x''$ sarà positiva, perciò il prodotto sarà negativo.

c) Se per x si sostituisce un numero minore di x'', questo sarà *a fortiori* minore di x'; le due differenze $x - x'$, $x - x''$ saranno dunque negative ed il prodotto, formato di due fattori negativi, sarà positivo.

Riassumendo « il trinomio

$$x^2 + p\,x + q$$

è positivo se ad x si sostituiscono numeri maggiori della maggior radice o minori della minore dell'equazione

$$x^2 + p\,x + q = 0;$$

e sarà negativo se per x si sostituiscono i numeri compresi fra le due radici dell'equazione. »

Esempio. « Il trinomio

$$x^2 - 8x + 7$$

sarà esso positivo o negativo quando in luogo di x si ponga

$$x = 32, \quad 4, \quad -3? »$$

Le radici di

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

sono

$$x' = 7, \quad x'' = 1$$

ora 32 è > 7, dunque per $x = 32$ il trinomio sarà positivo; 4 è compreso fra 7 ed 1, dunque per $x = 4$ il trinomio è negativo; -3 è minor di 1 dunque per $x = -3$ il trinomio è positivo.

II. L'equazione di secondo grado

$$x^2 + px + q = 0$$

abbia le sue radici reali ed uguali; siano esse x'.

Sappiamo che il trinomio $x^2 + px + q$ è in allora un quadrato perfetto (§ 88, *A*)

$$(x - x')^2$$

e un quadrato perfetto non può mai essere negativo. Dunque in tale caso la disuguaglianza

$$x^2 + px + q > 0$$

è soddisfatta da qualunque numero, meno che da x' che annulla il trinomio, e la disuguaglianza

$$x^2 + px + q < 0$$

è impossibile.

Così il trinomio

$$x^2 - 6x + 9$$

è positivo per qualunque valore di x, meno che per $x = 3$.

III. L'equazione di secondo grado

$$x^2 + px + q = 0$$

abbia le sue radici immaginarie.

Allora il trinomio è sempre positivo per qualunque valore di x. Per dimostrarlo, basterà mostrare che il trinomio è in tal caso somma di due quantità essenzialmente positive.

Infatti, se le radici dell'equazione sono immaginarie, sarà

$$\frac{p^2}{4} < q$$

cioè la differenza

$$q - \frac{p^2}{4}$$

è positiva.

Ora completando il quadrato,

$$x^2 + px + q =$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4}$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right);$$

qui $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ è un quadrato perfetto e quindi

positivo, il trinomio $q - \frac{p^2}{4}$ è positivo per ipotesi, talchè tutta la somma è positiva.

Il trinomio $x^2 + p\,x + q$ sarà quindi necessariamente positivo in questo terzo caso, e perciò sarà impossibile trovare numeri (reali) pei quali sia

$$x^2 + p\,x + q \leqq 0.$$

Il minimo valore del trinomio si avrà quando una delle due parti

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2, \quad \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

sarà nulla, e ciò avviene solo per

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Così il trinomio

$$x^2 - 6\,x + 48$$

è sempre positivo, ed essendo

$$x^2 - 6\,x + 48 = (x - 3)^2 + 39$$

il minimo valore del trinomio sarà per $x = 3$, cioè per ogni altro valore reale di x il trinomio sarà maggiore di 39.

PARTE TERZA

PROGRESSIONI E LOGARITMI

CAPITOLO XVII.

Progressioni.

95. Definizione e prime proprietà delle progressioni aritmetiche. Si chiama *progressione aritmetica* o *per differenza* una serie di numeri che si succedono per modo che la differenza fra un termine ed il precedente sia un numero costante, detto *ragione* della progressione. Così la serie di numeri

$$8 \,.\, 14 \,.\, 20 \,.\, 26 \,.\, 32 \,.\, 38 \,.\, 44 \,.\, 50 \ldots$$

è una progressione aritmetica la cui ragione è 6; la serie

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \ldots$$

è una progressione aritmetica la cui ragione è 1.

Si ottiene un termine di una progressione aggiungendo la ragione al termine precedente, o sottraendo la ragione dal termine seguente.

Si indica che una serie di numeri a, b, c co-

stituisce una progressione aritmetica, scrivendo

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots$$

Una progressione aritmetica si può proseguire indefinitamente con numeri crescenti. Essa si può anche proseguire indefinitamente nell'ordine decrescente, ma allora a partire da un certo punto i termini della progressione sono negativi.

Esempio:

$$\div \ldots -22 \,.\, -16 \; -10 -4 \,.\, 2 \,.\, 8 \,.\, 14 \,.\, 20 \,.\, 26 \,.\, 32 \,.\, 38 \ldots$$

Così, la progressione dei numeri naturali è indefinita nei due sensi

$$\div \ldots -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \ldots.$$

La progressione di ragione r di cui il primo termine è a, è

$$\div a \,.\, a+r \,.\, a+2r \,.\, a+3r \,.\, a+4r \ldots$$

e da questo si deduce subito il

Teorema 1.° « In una progressione aritmetica, il termine che occupa un dato posto è uguale al primo termine aumentato di tante volte la ragione quanti sono i termini che precedono quello che si cerca. »

Questo teorema si compendia nella seguente formola, in cui a_n sta a rappresentare il termine che occupa il posto n^{simo}:

$$a_n = a + (n-1)\,r.$$

96. Inserzione di medi aritmetici fra due numeri dati. Dati due numeri come a e b, *inserire*

m medi aritmetici fra questi due numeri vuol dire costruire una progressione che abbia a per primo termine, b per ultimo e contenga m termini fra a e b.

Il problema sarebbe risoluto se fosse trovata la ragione (che chiameremo x) di quella progressione: osserviamo che la progressione contenendo $m+2$ termini, b sarà preceduto da $m+1$ termini e quindi per la (1),

$$b = a + (m+1)\,x,$$

e da questa equazione di 1° grado ad una incognita si ricava

$$x = \frac{b-a}{m+1}, \qquad (2)$$

formola che serve a formare la ragione e quindi ad inserire i medi.

Esempio. Inserire 10 medi fra 234 e 3127. La ragione delle progressioni cercata sarà

$$\frac{3127-234}{10+1} = \frac{2893}{11} = 263$$

e la progressione cercata sarà

$$\div 234 \,.\, 497 \,.\, 760 \,.\, 1023 \,.\, 1286 \,.\, 1549 \,.\, 1812 \,.\, 2075 \,.\, 2338 \,.\, 2601 \,.\, 2864 \,.\, 3127 \,.$$

Dalla formola (2) si deduce che è sempre possibile di inserire fra due numeri dati tanti medi aritmetici quanti si vuole; la ragione si ottiene con una semplice divisione.

Teorema 2.° « Se fra i termini di una pro-

gressione aritmetica s' inserisce un ugual numero di medi aritmetici, questi medi insieme coi termini della progressione costituiscono un'unica progressione aritmetica. »

Dimostrazione. Abbiasi la progressione

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots$$

ed inseriamo m medi aritmetici fra a e b, altrettanti fra b e c, fra c e d, ecc.

I primi m medi insieme con a e b costituiscono una progressione aritmetica avente per ragione

$$\frac{b-a}{m+1};$$

così i medi inseriti fra b e c formano una progressione la cui ragione è

$$\frac{c-b}{m+1}$$

ma $b-a=c-b$, dunque le due progressioni hanno la stessa ragione; e siccome la prima termina col numero b che è il principio della seconda, esse costituiscono un'unica progressione, c. d. d.

97. Somma dei termini di una progressione aritmetica. *Teorema* 3.° « In una progressione aritmetica la somma di due termini ugualmente distante dagli estremi è uguale alla somma degli estremi. »

Dimostrazione. Abbiasi la progressione

$$\div \,.\, a \,.\, b \,.\, c \ldots h \,.\, k \,.\, l$$

dico che

$$a + l = b + k = c + h.$$

Infatti, indicando con r la ragione della progressione, si ha:

$$b = a + r, \quad k = l - r,$$

onde

$$b + k = a + r + l - r$$

ossia

$$b + k = a + l:$$

così

$$c = a + 2r, \quad h = l - 2r$$

onde

$$c + h = a + l,$$

e così di seguito.

Problema. « Trovare la somma dei termini di una progressione aritmetica limitata. »

Sia la progressione

$$\div a . b . c \ldots h . k . l .,$$

sia n il numero dei termini e S la somma dei termini

$$S = a + b + c + \ldots + h + k + l:$$

si può calcolare S con una operazione più semplice che coll'addizione diretta degli n termini. Si ha:

$$S = a + b + c + \ldots + h + k + l,$$

e riscrivendo la somma in ordine inverso:

$$S = l + k + h + \ldots + c + b + a$$

da cui

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) + \ldots$$
$$\ldots + (h + c) + (k + b) + (l + a).$$

Ma per il teorema precedente tutte queste parentesi sono eguali ad $a + l$, e sono in numero di n, per cui

$$2S = n(a + l)$$

donde

$$S = \frac{n(a + l)}{2}. \qquad (3)$$

Se si indica con r la ragione, avremo

$$l = a + (n - 1)r$$

e sostituendo

$$S = \frac{n[a + (n - 1)r + a]}{2}$$

ossia

$$S = \frac{n[2a + (n - 1)r]}{2}. \qquad (4)$$

Esempio: Trovare la somma dei termini della progressione

$$\div 1 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . 28 . 31 . 34 .$$

Si avrà:

$$S = \frac{(4 + 34) . 11}{2} = 209.$$

Applicazione del problema precedente.

a) Trovare la somma degli n primi numeri naturali.

Applicando la formola (3)

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esempio: La somma dei primi 100 numeri sarà

$$S = \frac{100 \, . \, 101}{2} = 5050.$$

b) Trovare la somma dei primi n numeri dispari.

Essi costituiscono la progressione

$$\div 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7 \, . \, 9 \ldots 2n - 1,$$

e si avrà, applicando la formola (3) precedente

$$S = \frac{n(2n - 1 + 1)}{2} = \frac{n \, . \, 2n}{2} = n^2$$

ossia:

« La somma dei primi n numeri dispari è uguale al quadrato del numero n. »

Così

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2 = 49.$$

98. Definizione e prime proprietà delle progressioni geometriche. Si chiama *progressione geometrica* o *per quoziente* una serie di numeri che si succedono per modo che il rapporto (o quoziente) di un termine al precedente sia un numero costante, che si dice *ragione*. Così i

numeri

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162$$

costituiscono una progressione che ha per ragione 3; i numeri

$$20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{16}\ldots$$

formano una progressione la cui ragione è $\frac{1}{2}$.

La progressione geometrica si suole indicare scrivendo

$$\div\div\ a : b : c : d : \ldots$$

La progressione è crescente se la ragione è maggiore dell'unità, decrescente se la ragione è minore dell'unità.

Ogni progressione è indefinita nei due sensi. Da una parte si ottengono numeri che vanno crescendo senza limite, dall'altra numeri che vanno sempre più diminuendo e tendendo allo zero. Le progressioni geometriche non contengono termini negativi se la ragione ed un termine sono positivi.

Se indichiamo con a uno dei termini e con q la ragione, si avrà

$$\div\div\ \ldots \frac{a}{q^3} : \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q} : a : a\,q : a\,q^2 : \ldots$$

Da ciò si scorge subito il

Teorema 1.° « Il termine n^{simo} di una progressione per quoziente si ottiene moltiplicando il primo termine per la ragione innalzata ad

una potenza indicata dall'esponente $n - 1$, uguale al numero dei termini che precedono l'n^{simo}. »

Questo teorema è espresso dalla formola

$$a_n = a\,q^{n-1}. \qquad (1)$$

99. Inserzione di medi geometrici fra due numeri dati. Dati due numeri qualunque a e b, *inserire m medi geometrici* fra questi due numeri significa trovare una progressione di $m + 2$ termini che incominci con a e finisca con b. Applicando la (1) avremo, indicando con x la ragione incognita di questa progressione geometrica,

$$b = a\,x^{m+1}$$

da cui

$$x^{m+1} = \frac{b}{a}$$

e

$$x = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \qquad (2)$$

e per mezzo di questa formola si trova la ragione della progressione.

Esempio: Inserire 3 medi geometrici fra 83 e 51875. La ragione della progressione sarà

$$\sqrt[4]{\frac{51875}{83}} = \sqrt[4]{625} = 5$$

e la progressione stessa sarà

$$\div\!\div\, 83 : 415 : 2075 : 10375 : 51875;$$

i medi sono

$$415,\ 2075,\ 10375.$$

La ragione q dipende da un'estrazione di radice, e quindi darà origine in generale a numeri incommensurabili: non si potranno dunque ordinariamente inserire medi geometrici razionali fra due numeri dati; però questi medi anche irrazionali si potranno sempre calcolare coll'approssimazione che si desidera.

Teorema 2.° « Se fra i termini di una progressione geometrica s'inseriscono medi geometrici in egual numero, questi medi, insieme coi termini della progressione data, costituiranno un'unica progressione per quoziente. »

Abbiasi infatti la progressione

$$\div\div\ a : b : c : d : \ldots$$

e fra a e b, b e c, ecc., s'inseriscano m medi geometrici.

I primi m medi insieme con a e b costituiscono una progressione che ha per ragione

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}};$$

gli m medi inseriti fra b e c hanno per ragione

$$\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}$$

e così via: ma $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, e perciò le ragioni di quelle

varie progressioni sono uguali, ed il primo termine dell'una essendo l'ultimo termine della precedente, esse costituiscono un'unica progressione, c. d. d.

100. Somma dei termini di una progressione geometrica limitata. Abbiasi una progressione geometrica limitata, composta di n termini, la cui ragione sia q ed a sia il primo termine: essa sarà

$$\because\because a : a q : a q^2 : a q^3 : \ldots a q^{n-1}.$$

Si può trovare un'espressione semplice che rappresenti la somma di questi n termini,

$$S = a + a q + a q^2 + a q^3 + \ldots + a q^{n-1}.$$

Per trovare S, moltiplico per q i due membri dell'eguaglianza precedente, ed ottengo

$$q S = a q + a q^2 + \ldots + a q^n$$

e sottraendo S da questa

$$q S - S = a q^n - a$$
$$S (q - 1) = a (q^n - 1)$$

da cui

$$S = \frac{a (q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (3)$$

Se $q < 1$, per avere i termini positivi si scriverà

$$S = \frac{a (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Esempio: Si scriverà che

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

è uguale a

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} \text{ o } \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

secondo che x è < 1 o > 1.

Così la somma

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots 2^{n-1}$$

sarà

$$\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1;$$

in particolare

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127.$$

101. Somma di una progressione decrescente indefinita. Si è trovato che se

$$\div\!\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots aq^{n-1}$$

è una progressione geometrica composta di n termini, la cui ragione sia minore dell'unità, la somma di questi termini sarà

$$S = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (4)$$

che si può anche scrivere

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{a\,q^n}{1 - q}. \qquad (5)$$

Questa somma è composta di due termini. Il primo di essi è invariabile, qualunque sia il numero dei termini della somma, il secondo termine, che è sottrattivo, varia invece al variare di n, ed essendo $q < 1$, tanto più n sarà grande tanto più q^n sarà piccolo, e quindi tanto minore sarà la parte sottrattiva $\frac{q^n}{1-q}$.

Potendosi prendere n tanto grande che quella parte sottrattiva diventi piccola a piacere, la somma dei termini sarà sempre più prossima ad

$$S = \frac{a}{1-q};$$

ossia:

« La somma di n termini di una progressione geometrica decrescente *tende* ad

$$\frac{a}{1-q}$$

quando il numero n dei termini che si sommano cresce indefinitamente, » e ciò si esprime dicendo che

$$\frac{a}{1-q}$$

è la *somma della progressione decrescente indefinita.*

Esempio. La progressione indefinita

$$\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{15} : \frac{1}{32} : \ldots$$

è decrescente e ha per ragione $\frac{1}{2}$. La somma di questa progressione indefinita

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots$$

sarà per quanto si è detto

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

e ciò vuol dire che prendendo di quella somma 10, 100, 1000, 10000 termini, la somma di questi non sarà mai esattamente 2, ma sarà tanto più prossima a 2 quanto maggiore sarà il numero di termini che si saranno presi.

Applicazione. Abbiasi la frazione decimale periodica.

$$a=0{,}45454545\ldots$$

questa si può scrivere

$$a=\frac{45}{100}+\frac{45}{100^2}+\frac{45}{100^3}+\ldots$$

e sotto questa forma si vede che la frazione periodica non è altro che una progressione geometrica decrescente avente per ragione $\frac{1}{100}$; e applicando la formola precedente per la somma si avrà

$$S=\frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{45}{99};$$

si trova così la regola nota dell'aritmetica per la costruzione della frazione generatrice di una frazione periodica.

CAPITOLO XVIII.

Cenno sulla teoria dei logaritmi dedotta dalle progressioni.

102. Definizione. « Date due progressioni, la prima geometrica che incomincia coll'unità, la seconda aritmetica e incominciante collo zero, i termini della seconda diconsi *i logaritmi* dei termini della prima, nel *sistema di logaritmi* formato dalle due progressioni. »

Le due progressioni saranno:

$$\left.\begin{array}{l} \because 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots q_n \ldots \\ \div\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \ldots nr \ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

si supporrà q maggiore dell'unità ed r positivo, ossia le progressioni crescenti.

Il termine nr è il logarimo di q^n, e si scrive

$$\log.\ q^n = nr.$$

103. Teorema fondamentale e corollari. *Teorema.* « Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori. »

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema, basta osservare che se a e b sono due termini della progressione geometrica, sarà

$$a = q^m,\ b = q^n$$

ed il loro prodotto sarà

$$a\,b = q^m \,.\, q^n = q^{m+n}.$$

D'altra parte tornando alle (1),

il logaritmo di a è $m\,r$
» » b » $n\,r$
» » ab » $(m+n)\,r$

ed essendo

$$(m+n)\,r = m\,r + n\,r$$

sarà

$$\log\, a\,b = \log a + \log b,$$

c, d. d.

Corollario. 1.° Il logaritmo di un numero qualunque di fattori è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori, cioè

$$\log a\,b\,c\,d = \log a + \log b + \log c + \log d.$$

2.° Il logaritmo di un quoziente è uguale al logaritmo del dividendo meno il logaritmo del divisore.

Abbiasi infatti

$$\frac{a}{b} = c;$$

sarà, per la definizione della divisione

$$a = b\,c$$

e per il teorema fondamentale

$$\log a = \log b + \log c$$

onde

$$\log c = \log a - \log b$$

ossia

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

c. d. d.

3.° Il logaritmo di una potenza è uguale al logaritmo del numero moltiplicato per l'esponente.

Abbiasi da formare il

$$\log a^m$$

questo è

$$\log (a \,.\, a \,.\, a \ldots m \text{ volte})$$

e quindi per il teorema fondamentale sarà

$$\log a^m = \log a + \log a + \log a + \ldots (m \text{ volte})$$

ossia

$$\log a^m = m \log a$$

c. d. d.

4.° Il logaritmo della radice di un numero è uguale al logaritmo del numero diviso per l'indice del radicale.

Sia

$$x = \sqrt[m]{a},$$

ciò equivale, per la definizione di radice, ad

$$a = x^m.$$

Per il corollario terzo

$$\log a = m \log x$$

da cui

$$\log x = \frac{\log a}{m},$$

c. d. d.

104. Possibilità di una applicazione dei logaritmi. Le quattro formole

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \log a\,b = \log a + \log b \\ \text{II.} & \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \\ \text{III.} & \log a^m = m \, . \log a \\ \text{IV.} & \log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m} \end{array}\right\}$$

contengono tutta la teoria dei logaritmi. Se fosse possibile di far entrare tutti i numeri in una progressione geometrica e di calcolare i loro logaritmi, le quattro formole precedenti permetterebbero di semplificare i calcoli, e di ridurre

ogni moltiplicazione ad una addizione
» divisione ad una sottrazione
» innalz. a potenza ad una motiplicazione
» estrazione di radice ad una divisione.

Il piano di questa opera non permettendoci di esporre con esattezza e rigore la teoria dei logaritmi, ci dovremo limitare ad indicare succintamente in quale modo si è potuto far si che tutti i numeri vengano a riguardarsi come appartenenti ad una progressione geometrica, con tale approssimazione da soddisfare ai bisogni delle applicazioni.

105. METODO DELL'INSERZIONE DEI MEDI. Si è dimostrato che se fra i termini di una progressione sia aritmetica, sia geometrica, si inserisce un egual numero di medi, si ottiene una nuova unica progressione aritmetica o geometrica; di più fra due numeri dati a, b si possono inserire tanti medi aritmetici o geometrici quanti si vogliono, e le ragioni essendo rispettivamente

$$\frac{b-a}{m+1}, \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

si potrà, prendendo m abbastanza grande, ridurre la prima frazione piccola quando si vuole e la seconda vicino ad *uno* quando si vuole, e quindi inserendo tra i termini di una progressione un numero abbastanza grande di medi, i termini della nuova progressione saranno fra loro vicini quando si vuole.

Ecco in qual modo ci possiamo giovare di questa osservazione per trovare i logaritmi di tutti i numeri:

Il sistema primitivo di progressioni sia per esempio

$$\left.\begin{array}{l} \div\div 1 : 10 : 100 : 1{,}000 : 10{,}000 \ldots \\ \div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ \ldots \end{array}\right\}$$

in questo sistema i soli numeri che abbiano logaritmi sono le potenze di 10; ma possiamo ottenere, col metodo dell'inserzione dei medi anche i logaritmi degli altri numeri; per esempio di 2, 3, 4, ... 9.

Inseriamo infatti, fra 1 e 10, cento medi geometrici, e fra 0 ed 1, cento medi aritmetici: fra i 100 medi geometrici se ne troverà uno più di tutti vicino a 2, si prenda quello per 2 e il medio aritmetico corrispondente, per approssimazione, come logaritmo di 2: così si potrà ottenere la seguente tavola:

$$\begin{array}{l} \because 1\ldots 2\ldots\ldots 3\ldots\ldots 4\ldots 5\ldots\ldots 6 \\ \div\ 0\ldots 0{,}30\ldots 0{,}48\ldots 0{,}60\ldots 0{,}70\ldots 0{,}78 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ldots 7\ldots\ldots 8\ldots 9\ldots\ldots 10 \\ \ldots 0{,}84\ldots 0{,}90\ldots 0{,}95\ldots 1 \end{array}$$

I numeri della riga superiore facendo parte di una stessa progressione geometrica e quelli della riga inferiore di una stessa progressione geometrica, si potrà applicar lòro il teorema fondamentale coi suoi corollari.

Il metodo dei medi è puramente teorico, e condurrebbe nella pratica a calcoli lunghissimi: per avere i logaritmi coll'approssimazione indicata occorrerebbe infatti inserire 100 medi fra 1 e 10, 10 e 100, cioè estrarre la $\sqrt[101]{10}$ con sufficiente approssimazione. Ci basti avvertire che esistono metodi molto più rapidi per la costruzione di simili *Tavole*, e mediante i quali si può valutare con rigore il grado d'approssimazione che si raggiunge.

106. Sistema dei logaritmi volgari. Tavole. I logaritmi generalmente adoperati nelle applicazioni pratiche della matematica sono i logaritmi detti *volgari*, o *a base dieci*, aventi per origine

una progressione geometrica colla ragione 10, e una progressione aritmetica colla ragione 1, cioè;

$$\begin{matrix} \div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \dots \\ \div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \dots \end{matrix}$$

Si sono costruite delle Tavole di logaritmi (ed il metodo dell'inserzione dei medi ci rende conto almeno della possibilità di una simile costruzione) contenenti i logaritmi di tutti i numeri da 1 a 108000, coll'approssimazione di un diecimillionesimo, approssimazione sufficiente per la massima parte delle applicazioni tecniche e scientifiche.

Tali Tavole servono a risolvere i due seguenti problemi:

« Dato un numero, trovarne il logaritmo. »

« Dato il logaritmo, trovare il numero corrispondente. »

107. Caratteristica. Le sole potenze di 10 hanno logaritmi interi; gli altri numeri interi hanno logaritmi incommensurabili, che si esprimono ordinariamente coll'approssimazione di 5 o 6 o 7 cifre decimali.

Il logaritmo di 10 è 1, quello di 100 è 2,... quello di 10^n è n.

Un numero compreso fra 1 e 10 avrà il suo logaritmo compreso fra 0 ed 1, un numero compreso fra 10 e 100 avrà il logaritmo compreso fra 1 e 2,... un numero compreso fra 10^n e 10^{n+1} avrà il logaritmo compreso fra n ed $n+1$.

Da ciò risulta che:

La parte intera del logaritmo per un numero

compreso fra 1 e 10 sarà 0, essa sarà 1 per un numero compreso fra 10 e 100, 2 per un numero compreso fra 100 e 1000,... n per un numero compreso fra 10^n e 10^{n+1}. La parte intera di un logaritmo dicesi *Caratteristica* di questo logaritmo, e la parte decimale dicesi *mantissa.* Si ha quindi il teorema:

« La caratteristica del logaritmo di un numero (intero o fratto) è uguale al numero delle cifre della parte intera del numero, meno uno. »

Così le caratteristiche dei logaritmi di

$$42, \frac{51}{4}, 8932571, 8324, 735$$

saranno rispettivamente;

$$1, \quad 1, \quad 6, \quad 3, \quad 2.$$

Teorema: « Moltiplicando o dividendo un numero per una potenza di 10, la mantissa del logaritmo di questo numero non si altera, e la caratteristica resta aumentata o diminuita dell'esponente della potenza di 10 per cui si è moltiplicato e diviso. »

Dimostrazione. Si ha dalle tavole

$$\log 31416 = 4,4971509.$$

Moltiplico il numero per 10^3 e dico che il logaritmo si aumenta di 3 unità, cioè

$$\log 31416000 = 7,4971509.$$

Infatti per il teorema fondamentale (§ 103)

$$\log 31416 \times 10^3 = \log 31416 + \log 10^3,$$

ma

$$\log 31416 = 4{,}4971509$$
$$\log 10^3 = 3$$

onde

$$\log 31416000 = 7{,}4971509.$$

Similmente, divido il numero per 10^3: dico che il logaritmo diminuisce di 3 unità, cioè

$$\log 31{,}416 = 1{,}4971509$$

infatti (§ 105, coroll. 2.°)

$$\log \frac{31416}{1000} = \log 31416 - \log 1000 =$$
$$= 4{,}4971509 - 3 = 1{,}4971509$$

c. d. d.

Conoscendo il valore della caratteristica di un logaritmo, si può trovare il numero delle cifre intere del numero corrispondente:

Abbiasi, per esempio:

$$\log x = 8{,}9123457$$

e si voglia trovare quante cifre intere avrà x. Si ha che $\log x$ è compreso fra 8 e 9, quindi x fra 10^8 e 10^9, ma 10^8 ha 9 e 10^9 ha 10 cifre, per cui x avrà 9 cifre intere.

Nelle tavole di logaritmi si trovano le mantisse dei logaritmi dei numeri, ma non le caratteristiche che si devono calcolare per mezzo delle regole che precedono.

108. Operazioni semplificate per mezzo dei logaritmi. Non ci è possibile di entrare in mag-

giori particolari sul modo di adoperare le Tavole di logaritmi: il loro uso è reso agevole dalla pratica, e non presenta difficoltà teoriche: ci limiteremo a dare alcuni esempi di operazioni aritmetiche abbassate di grado per mezzo dei logaritmi.

I. Una moltiplicazione si riduce ad una addizione.

Sia da eseguire

$$3492 \times 5937.$$

Si trova nelle tavole:

$$\log 3492 = 3{,}54307$$
$$\log 5937 = 3{,}77356$$
$$\log 3492 \times 5937 = \log 3492 + \log 5937 = 7{,}31663$$

e risalendo per mezzo delle tavole da questo logaritmo al numero corrispondente si trova

$$3482 \times 5937 = 20731004.$$

II. Una divisione si riduce ad una sottrazione.

Abbiasi per esempio:

$$5937 : 3492$$

si ha

$$\log \frac{5937}{3492} = \log 5937 - \log 3492 =$$
$$= 3{,}77356 - 3{,}54307 = 0{,}23049$$

e risalendo al numero:

$$\frac{5937}{2349} = 1{,}7002.$$

III. Un innalzamento a potenza si riduce ad una moltiplicazione.

Sia da eseguire la quarta potenza di 59.

$$\log 59 = 1{,}7708520$$

$$\log \overline{59^4} = 1{,}7708520 \times 4$$
$$= 7{,}0834080$$

e risalendo al numero,

$$\overline{59^4} = 12118361.$$

IV. Un'estrazione di radice si riduce ad una divisione.

Abbiasi da eseguire $\sqrt[5]{3492}$.

$$\log 3492 = 3{,}54307$$

$$\log \sqrt[5]{3492} = \frac{3{,}54307}{5} = 0{,}70861$$

e risalendo al numero

$$\sqrt[5]{3492} = 5{,}1123.$$

109. Logaritmi di numeri minori dell'unità, caratteristiche negative. Fin qui si sono considerati i logaritmi dei numeri maggiori dell'unità; i numeri minori non avevano logaritmi, perchè la progressione geometrica era crescente e principiava coll'unita. Ora per poter estendere anche ai numeri minori dell'unità l'uso dei logaritmi, si sono dovuti introdurre logaritmi negativi.

Se prolunghiamo anche verso sinistra le due

progressioni primitive, troviamo

$$\left.\begin{array}{l} \div \dots \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : \dots \\ \div \dots -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 : 3 \dots ; \end{array}\right\}$$

il logaritmo di 0,01 è dunque -2, quello di 0,0001 è -4, ecc.

In quanto ai logaritmi dei numeri decimali che non sono potenze di 10, essi si trovano nel seguente modo:

Abbiasi da trovare il logaritmo di 0,003492. Si ha

$$0{,}003492 = \frac{3{,}492}{1000},$$

$$\log 0{,}003402 = \log 3{,}492 - \log 1000$$
$$\log 3{,}492 = 0{,}54307$$
$$\log 1000 = 3$$

onde

$$\log 0{,}003492 = -3 + 0{,}54307$$

che si scrive

$$\overline{3}{,}54307$$

e dove la caratteristica sola è negativa.

Da ciò la regola:

« Il logaritmo di un numero minore dell'unità ha una caratteristica negativa eguale al numero degli zeri che seguono la virgola, più una: ed ha una mantissa uguale a quella del logaritmo

del numero che si ottiene facendo astrazione dalla virgola.

È chiaro che se il numero proposto è dato in frazione ordinaria, lo si dovrà prima ridurre in frazione decimale.

Esempio: $\log \frac{1}{5} = \log 0{,}2$

$$\log\ 2 = 0{,}30103$$

$$\log 0{,}2 = \overline{1}{,}30103$$

che sta a significare

$$-1 + 0{,}30103$$

FINE.

ELENCO COMPLETO DEI MANUALI HOEPLI

PUBBLICATI SINO AL 1894

L. c.

Acque (Manuale delle) **minerali e luoghi di cura del Regno d'Italia,** di Luigi Tioli. (In lavoro).
— (Vedi *Assistenza — Igiene — Soccorsi*).

Adulterazione e falsificazione degli alimenti, del Dott. Prof. L. Gabba, di pag. VIII-212 . . . . . . 2 —

Agricoltura. (Vedi *Analisi del vino — Animali da cortile — Apicoltura — Bachi da seta — Bestiame — Chimica agraria — Colombi — Coltivazione, ecc., delle piante tessili — Contabilità agraria — Economia dei fabbricati rurali — Enologia — Estimo — Frumento e Mais — Frutticoltura — Funghi — Igiene veterinaria — Insetti nocivi — Insetti utili — Latte, cacio e burro — Macchine agricole — Malattie crittogamiche — Malattie dei vini — Olivo — Orticoltura — Ostricultura — Piante e fiori — Piante industriali — Pollicoltura — Pomologia artificiale — Prato — Selvicoltura — Tartufi — Uva passa — Vino — Viticoltura — Zootecnia*).

Agronomia, del Prof. F. Carega di Muricce, 2ª ed., di pag. VI-200. . . . . 1 50

Algebra complementare, di Pincherle. Parte I. *Analisi algebrica,* di pag. VIII-174. . . . . 1 50
— Parte II. *Teoria delle equazioni,* di pag. IV-170 con 4 incisioni nel testo 1 50

Algebra elementare, del Prof. S. Pincherle, 5ª ed., di pag. VIII-210 . . . . 1 50

Alimentazione, di G. Strafforello, di pag. VIII-122. 2 —

Alimenti. (Vedi *Adulterazione — Conserve — Frumento e Mais — Panificazione*).

Alpi (Le), di J. Ball, trad. di I. Cremona, pag. VI-120. 1 50
— (Vedi *Dizionario alpino — Prealpi bergamasche*).

Alterazione dei vini. (Vedi *Malattie ed alterazioni*).

Amministrazione pubblica. (Vedi *Diritto amministrativo — Catasto italiano — Codice doganale — Contabilità comunale — Imposte dirette — Legge comunale — Ricchezza mobile — Contabilità dello Stato*).

L. c.

Analisi algebrica. (Vedi *Algebra complementare*).

Analisi del vino, ad uso dei chimici e dei legali, del Dott. M. Barth, con pref. del Dott. L. Nessler, trad. del Prof. D. F. C. Comboni, di pag. 142 con 7 incis. 2 —

— (Vedi *Cantiniere* — *Cognac* — *Enologia* — *Malattie dei vini* — *Vino* — *Viticoltura*).

Analisi spettrale. (Vedi *Spettroscopia*).

Anatomia e fisiologia comparata, del Prof. R. Besta. (In lavoro).

— (Vedi *Batteriologia* — *Fisiologia* — *Imbalsamatore* — *Insetti* — *Protistologia* — *Zoologia*).

Anatomia pittorica, di A. Lombardini, pag. VI-118 con incisioni . . . . 2 —

— (Vedi *Ristauratore dei dipinti* — *Scienza dei colori e la pittura*).

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo,** del Prof. F. Mercanti. (In lavoro).

Animali da cortile, del Prof. P. Bonizzi, di pag. XIV-238 con 39 incisioni . . . . 2 —

— (Vedi *Bestiame* — *Colombi* — *Pollicoltura*).

Antichità private dei romani, del Prof. W. Kopp, trad. del Prof. N. Moreschi, 2ª ediz., di pag. XII-130. 1 50

— (Vedi *Archeologia dell'arte*).

Antropologia, del Prof. G. Canestrini, 2ª ediz., riveduta ed ampliata, di pag. VIII-232, con 23 incisioni. 1 50

— (Vedi *Etnografia* — *Paleoetnologia*).

Apicoltura razionale, del Prof. G. Canestrini, 2ª edizione riveduta di pag. IV-196, con 43 incisioni . . 2 —

Apprestamento delle fibre tessili. (Vedi *Filatura*).

Arabo volgare (Manuale di), di De Sterlich e Dib Khaddag. Raccolta di 1200 vocaboli e 600 frasi più usuali, di pag. 143, con 8 tavole 2 50

Araldica (Grammatica), di F. Tribolati, 3ª ediz., di pag. VIII-120, con 98 inc. e un'appendice sulle " Livree ". 2 50

Archeologia dell'arte, del Prof. I. Gentile:

Parte I. *Storia dell'arte greca* testo, 2ª ed., p. XII-226. 2 —

" *Atlante* per l'opera sudd. di *149 tavole*, indice. 4 —

Parte II. *Storia dell'arte etrusca e romana,* testo, 2ª ediz., di pag. IV-228. . . . . 2 —

Parte II. *Atlante* per l'opera sudd. di *79 tavole*, indice. 2 —

Architettura italiana, dell'Arch. A. Melani, 2 vol., di pag. XVIII-214 e XII-266, con 46 tavole e 113 figure, 2ª edizione . . . . 6 —

I. Architet. Pelasgica, Etrusca, Italo-Greca e Romana.

II. Architettura Medioevale, fino alla Contemporanea.

Aritmetica pratica, del Dott. F. Panizza, di p. VIII-188 1 50

Aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. Panizza, 2ª ediz., pag. XII-210 . . . . 1 50

L. c.

Armonia, del Prof. C. POLLINI. (In lavoro).
—(Vedi *Cantante - Musica - Pianista - Storia della musica - Strumentazione - Strumenti ad arco*).
Arte del dire (L'), del Prof. D. FERRARI, 2ª ediz., corretta ed ampliata, di pag. XVI-190. . . . . . . 1 50
— (Vedi *Rettorica — Ritmica — Stilistica*).
Arte militare. (Vedi *Storia dell'*).
Arte mineraria, dell'Ing. Prof. V. ZOPPETTI, di pagine IV-182, con 112 figure in 14 tavole. . . . . . . 2 —
Arte greca, etrusca e romana. (Vedi *Archeologia dell'arte*).
Arti (Le) grafiche fotomeccaniche. **Zincotipia,** Autotipia, Eliografia, Fototipia, Fotolitografia, Fotosilografia, Tipofotografia, ecc., secondo i metodi più recenti, dei grandi maestri nell'arte: ALBERT, ANGERER, CRONENBERG, EDER, GILLOT, HUSNIK, KOFAHL, MONET, POITEVIN, ROUX, TURATI, ecc., con un cenno storico sulle arti grafiche e un Dizionarietto tecnico; pag. IV-176 con 9 tavole illustrate. . . . . 2 —
— (V. *Dizion. Fotografico — Fotografia dei colori — Fotografia per dilettanti — Ricettario fotografico*).
Arti. (Vedi *Anatomia pittorica — Archeologia dell'arte — Architettura — Decorazione — Disegno — Pittura — Scultura*).
Asfalto (L'), fabbricazione - applicazione, dell'Ing. E. RIGHETTI, con 22 incisioni, di pag. VIII-152 . . . . . . 2 —
Assicurazione sulla vita, di C. PAGANI, pag. VI-152. 1 50
Assistenza degli infermi nell'Ospedale ed in famiglia, del Dott. C. CALLIANO, p. XXIV-448, con 7 tav. 4 50
— (V. *Acque minerali — Igiene — Soccorsi d'urgenza*).
Assonometria. (Vedi *Disegno assonometrico*).
Astronomia, di I. N. LOCKYER, tradotta ed in parte rifatta da E. SERGENT e riveduta da G. V. SCHIAPARELLI, 3ª ediz., di pag. VI-156, con 44 incisioni . . . 1 50
— (Vedi *Gravitazione — Spettroscopia*).
Atlante geografico-storico dell'Italia, del Dott. G. GAROLLO, 24 carte, 76 pag. di testo e un' Appendice. 2 —
— (Vedi *Dizionario geografico — Esercizi geografici — Geografia — Prontuario di Geografia*).
Atlante geografico universale, di KIEPERT, con notizie geografiche e statistiche del Dott. G. GAROLLO, 8ª ediz. (dalla 70000 alla 80000 copia), 25 carte, 88 pagine di testo . . . . 2 —
Atmosfera. (V. *Climatologia - Igroscopi - Meteorologia*).
Atti notarili. (Vedi *Notaro — Testamenti*).
Attrezzatura, manovra delle navi e segnalazioni marittime, di F. IMPERATO, con molte incisioni. (In lavoro).
— (Vedi *Ingegnere navale — Macchinista navale*).

L. c.

Autotipia. (Vedi *Arti Grafiche*).
Avicoltura. (Vedi *Animali da cortile — Colombi domestici — Pollicoltura*).
Bachi da seta, del Prof. T. Nenci, di pag. VI-276, 2ª ediz., con 41 incisioni e 2 tavole . . . . 2 —
— (Vedi *Industria della seta — Tintura della seta*).
Batteriologia, dei Proff. G. e R. Canestrini, di pagine VI-240 con 29 illustrazioni 1 50
— (Vedi *Microscopio — Protistologia*).
Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia, del Prof. F. Alberti, di pag. VIII-312, con 22 zincotipie 2 50
— (Vedi *Agricoltura*).
Biancheria. (Vedi *Disegno, taglio e confezione di*).
Bibliografia, di G. Ottino, 2ª ediz., riveduta di pagine VI-166, con 17 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Dizionario bibliografico*).
Bibliotecario (Manuale del), di Petzholdt, traduzione di G. Biagi. (In lavoro).
Borsa (Operaz. di). (Vedi *Valori pubblici — Debito pubblico*).
Bromatologia. (Vedi *Adulterazione — Alimentazione — Conserve alimentari — Frumento e mais — Panificazione*).
Botanica, del Prof. I. D. Hooker, traduz. del Prof. N. Pedicino, 4ª edizione, di pag. XIV-134, con 68 incisioni 1 50
Burro. (Vedi *Latte*).
Cacciatore (Manuale del), di G. Franceschi, di pagine VIII-268, con 10 tavole e 14 incisioni nel testo. 2 50
Calligrafia (Manuale di). Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d'insegnamento, con 69 tavole di modelli dei principali caratteri conformi ai programmi governativi del Professore R. Percossi, con 35 fac-simili di scritture, elegantemente legato, tascabile, con leggío annesso al manuale per tenere il modello . . . . 3 —
Caloriferi. (Vedi *Riscaldamento*).
Candele. (Vedi *Stearineria e Fabb. di Candele*).
Cantante (Manuale del), di L. Mastrigli, di pagine XII-132 . . . . 2 —
Cantiniere. Lavori di cantina mese per mese, dell'Ingegnere A. Strucchi, di pag. VIII-172 con 30 incisioni. 2 —
— (Vedi *Analisi del vino — Cognac — Enologia — Malattie del vino — Vino — Viticoltura*).
Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto sulla storia della Cartografia, del Prof. E. Gelcich, con 35 illustrazioni. (In lavoro).
— (Vedi *Disegno topografico — Telemetria*).

L. c.

Caseificio, di L. Manetti, 2ª ediz., completamente rifatta dal Prof. Sartori, di pag. IV-212, con 34 incis. 2 —
— (Vedi *Adulterazione degli alimenti — Latte, burro, cacio*).
Catasto (Il nuovo) **italiano,** dell'Avv. E. Bruni, di pag. XII-346, vol. doppio. . . . . 3 —
Cavallo (Manuale del), del Ten. Colonnello C. Volpini, di pag. IV-200 con illustrazioni e 8 tavole. . . 2 50
Celerimensura (Manuale pratico di), e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. Borletti, di pag. VI-148 con 29 incisioni 3 50
Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ing. G. Orlandi, di pag. 1200 con un quadro generale d'interpolazioni. . . . . 18 —
— (V. *Cartografia — Compensazione degli errori — Disegno topografico — Geometria pratica — Telemetria*).
Ceralacche. (Vedi *Vernici*).
Cereali. (Vedi *Frumento e Mais — Panificazione*).
Chimica, del Prof. H. E. Roscoe, traduzione del Prof. A. Pavesi, di pag. VI-124, con 36 incisioni, 4ª edizione. 1 50
Chimica agraria, del Dott. A. Aducco, di p. VIII-328. 2 50
— (Vedi *Concimazione*).
Chimico (Manuale del) **e dell'industriale,** ad uso dei Chimici analitici e tecnici, degli industriali, ecc., del Dott. Prof. L. Gabba, di pag. XII-354. . . . . . 5 —
Ciclista (Manuale del), di A. Galante, riccamente illustrato, di pag. VI-194, con 73 fototipie 2 50
Climatologia, di L. De Marchi, p. X-204, con 6 carte 1 50
— (Vedi *Igroscopi — Meteorologia — Sismologia*).
Codice doganale italiano con commento e note, dell'Avv. E. Bruni. (In lavoro).
— (V. *Amministrazione pubblica - Trasporti e tariffe*).
Codice metrico internazionale. (Vedi *I Prototipi del metro e del kilogramma*).
Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di Dal Piaz-di Prato, di pag. X-168, con 37 incisioni. 2 —
Colombi domestici e colombicoltura, del Prof. P. Bonizzi, di pag. VI-210, con 29 incisioni . . . . . 2 —
— (Vedi *Animali da cortile — Pollicoltura*).
Colombo C. (Vedi *Cristoforo Colombo*).
Colori e la pittura (La scienza dei), del Prof. L. Guaita, di pag. 248. . . . . 2 —
— (Vedi *Anatomia pittorica*).
Colori e vernici, di G. Gorini, 3ª edizione, di pagine IV-184. . . . . 2 —
— (Vedi *Fotografia — Luce e colori — Vernici*).

L. c.

Coltivazione ed industrie delle piante tessili, propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un Dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pag. XII-476, con 72 incis. 5 —
— (Vedi *Filatura — Piante industriali*).
Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. CROTTI, pag. IV-160. 2 —
Computisteria, del Prof. V. GITTI, vol. I. Computisteria commerciale, 3ª ediz., di pag. VI-168. . . . . 1 50
— Vol. II. Computisteria finanziaria, di pag. VIII-156. 1 50
Computisteria agraria, del Prof. L. PETRI, di pagine VI-212. . . . . 1 50
— (Vedi *Contabilità — Ragioneria — Logismografia — Scritture d'affari*).
Concia delle pelli ed arti affini, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210. . . . . . 2 —
Concimazione, del Prof. FUNARO (In lavoro).
— (Vedi *Chimica agraria*).
Confezione di biancheria. (Vedi *Disegno, taglio e*).
Conserve alimentari, di G. GORINI, 2ª ediz., di p. 164. 2 —
— (Vedi *Adulterazione — Alimentazione — Latte, burro e cacio — Panificazione*).
Contabilità comunale, secondo le nuove disposizioni legislative e regolamentari (Testo unico 10 febbraio 1889 e R. Decreto 6 luglio 1890, del Prof. A. DE BRUN, di pag. VIII-244 . . . . 1 50
— (Vedi *Diritto amministrativo — Legge comunale*).
Contabilità generale dello Stato, dell'Avv. E. BRUNI, pag. XII-422 (vol. doppio) . . . . 3 —
— (V. *Computisteria — Ragioneria — Logismografia*).
Corpi grassi e stearineria, dell'Ing. E. MARAZZA.
— (Vedi *Industria stearica*).
Correttore e compositore tipografo. (Vedi *Tipografia*).
Corse (Dizionario termini delle), del T. Col. C. VOLPINI. 1 —
— (Vedi *Cavallo*).
Costituzione di tutti gli Stati. (Vedi *Ordinamento*).
Costumi. (Vedi *Etnografia*).
Cristallografia geometrica, fisica e chimica applicata ai minerali, del Prof. F. SANSONI, di p. XVI-368, con 284 incisioni nel testo (vol. doppio). . . . . . 3 —
— (Vedi *Geologia — Mineralogia*).
Cristoforo Colombo, di V. BELLIO, con 10 inc., di pag. IV-136. . . . . 1 50
Crittogame. (V. *Malattie crittogamiche delle piante*).

L. c.

Cronologia. (Vedi *Storia e Cronologia*).
Cubatura. Prontuario per la cubatura dei legnami, di G. Belluomini, 2ª ediz. aumentata e corretta, di pag. 204. 2 50
— (Vedi *Falegname ed ebanista*).
Curve. Manuale pel tracciamento delle curve delle Ferrovie e Strade carrettiere di G. H. Kröhnke, traduz. dell'Ing. L. Loria, 2ª ediz., di pag. 164, con 1 tav. 2 50
Dante, di G. A. Scartazzini, 2 vol., di pag. VIII-130 e IV-147: I. Vita di Dante. — II. Opere di Dante . . 3 —
Debito (Il) pubblico italiano e le regole e i modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. Azzoni, di pag. VIII-376 (vol. doppio). . . . . 3 —
— (Vedi *Imposte dirette — Interesse e sconto — Ricchezza mobile — Valori pubblici*).
Decorazione e industrie artistiche, con una introduzione sulle industrie artist. nazionali, dell'Arch. A. Melani, 2 vol.. di complessive pag. XX-460, con 118 incis. 6 —
Demografia. (Vedi *Statistica*).
Diboscamento. (Vedi *Selvicoltura*).
Digesto (Il), di C. Ferrini, di pag. IV-134. . . . . 1 50
Dinamica elementare, del Dott. C. Cattaneo, di pag. VIII-146, con 25 figure 1 50
— (Vedi *Termodinamica*).
Diplomatica, del Prof. L. Zdekauer. (In lavoro).
Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche scuole, del Prof. D. Maffioli, 8ª ed., di pag. XVI-203 . . . . 1 50
Diritto amministrativo giusta i programmi governativi, ad uso degli Istituti tecnici, del Prof. G. Loris, 2ª edizione, di pag. XXII-503 (volume doppio). . . . 3 —
Diritto civile italiano, del Prof. C. Albicini, p. VIII-128 1 50
Diritto commerciale. (Vedi *Mandato*).
Diritto comunale e provinciale, di Mazzoccolo. (Vedi *Legge comunale e provinciale*).
Diritto costituzionale, di F. P. Contuzzi, p. XII-320. 1 50
Diritto ecclesiastico, del Dott. C. Olmo, di pagine XII-472 (volume doppio) . . . . 3 —
Diritto internazionale privato, dell'Avv. Prof. F. P. Contuzzi, di pag. XVI-392 (volume doppio) . . . . 3 —
Diritto internazionale pubblico, dell'Avv. Prof. F. P. Contuzzi, di pag. XII-320 (volume doppio). . . . . 3 —
Diritto penale, dell'Avv. A. Stoppato, di p. VIII-192. 1 50
Diritto romano, del Prof. C. Ferrini, di pag. VIII-132. 1 50
Disegno. I principii del Disegno e gli stili dell'Ornamento, del Prof. C. Boito, 3ª edizione, di pag. IV-206, con 61 silog. . . . . 2 —
Disegno assonometrico, del Prof. Paoloni, di pagine IV-122 con 21 tavole e 23 figure nel testo . . . 2 —

L. c.

Disegno geometrico, del Prof. A. Antilli, di pagine VIII-85, 6 figure nel testo e 26 tavole litografiche 2 —
Disegno topografico, del Capitano G. Bertelli, di pag. VI-136, con 12 tavole e 10 incisioni . . . . . 2 —
— (*Vedi Cartografia — Telemetria*).
Disegno, taglio e confezione di biancheria (Manuale teorico pratico di), di E. Bonetti, con un Dizionario di nomenclatura, di pag. VIII-216 con 40 tavole. 3 —
Disinfezione. (Vedi *Infezione*).
Distillazione. (Vedi *Cognac*).
Dizionario alpino italiano. Parte 1ª: *Vette e valichi italiani*, dell'Ing. E. Bignami-Sormani. — Parte 2ª: *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia*, dell'Ing. C. Scolari, di pag. XXII-310 . . . . 3 50
— (Vedi *Alpi* e *Prealpi bergamasche*).
Dizionario della lingua dei Galla (Oromonica). (Vedi *Grammatica*).
Dizionario bibliografico, di C. Arlìa, di pag. 100. 1 50
Dizionario fotografico ad uso dei dilettanti e professionisti, contenente oltre 1500 voci in 4 lingue, nonchè 500 sinonimi e 600 formule del Dott. Luigi Gioppi, di pag. VIII-600 con 95 incis. e 10 tavole fuori testo. 7 50
— (Vedi *Arti grafiche fotomeccaniche — Fotografia per dilettanti — Ricettario fotografico*).
Dizionario geografico universale, del Dott. G. Garollo, 3ª edizione, di pag. VI-632 a due colonne . . 6 50
Dizionario italiano. (Vedi *Vocabolario italiano*).
Dizionario italiano e Volapük, di C. Mattei. (Vedi *Volapük*).
Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese e francese, disposte in un unico alfabeto, 1 vol. di pag. 1200 . . . . 8 —
Dogane. (Vedi *Codice doganale — Trasporti*).
Dottrina popolare, in 4 lingue. (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. Sessa, 2ª ediz., di pag. IV-212. 2 —
Economia dei fabbricati rurali, di V. Niccoli, di pag. VI-192. . . . . 2 —
— (Vedi *Estimo rurale*).
Economia politica, del Prof. W. S. Jevons, traduz. del Prof. L. Cossa, 3ª ed., riveduta, di pag. XIV-174. 1 50
— (Vedi *Scienza delle finanze*).
Elettricista (Manuale dell'), di G. Colombo e R. Ferrini, di pag. VIII-204-44 con 40 incisioni . . . . . 4 —
— (Vedi *Illuminazione — Telefono — Telegrafia*).
Elettricità, del Prof. Fleeming Jenkin, traduz. del Prof. R. Ferrini, di pag. VIII-180, con 32 incisioni. 1 50
— (Vedi *Magnetismo — Unità assolute*).

L. c.

Elettrolisi. (Vedi *Galvanoplastica*).
Elettrotipia. (Vedi *Galvanoplastica*).
Eliografia. (Vedi *Arti grafiche*).
Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 volumi di oltre 3000 pag. di 110 righe per ogni pagina. (In lavoro). Associazione all'opera completa (18 fasc. a L. 1) . . 18—
Energia fisica, di R. FERRINI, di pag. VI-108, con 15 incisioni 1 50
— (Vedi *Dinamica elementare — Termodinamica*).
Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, del Prof. O. OTTAVI, 2ª ediz., riveduta e ampliata da A. STRUCCHI, di pag. XII-194, con 21 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Analisi del vino — Cantiniere — Cognac — Malattie dei vini. — Vino — Viticoltura*).
Entomologia. (Vedi *Insetti nocivi — Insetti utili*).
Equazioni (Teoria delle), del Prof. S. PINCHERLE, di pag. XII-170, con 4 incisioni 1 50
— (Vedi *Algebra complementare*).
Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, di pag. IV-170. . . . . 1 50
Esercizi geografici e quesiti, di L. HUGUES, **sull'Atlante di R. Kiepert,** 2ª ediz., di pag. 76 . . 1 —
Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della grammatica tedesca, del Prof. G. ADLER, di pag. IV-236 . . . . 1 50
— (Vedi *Grammatica tedesca — Letteratura*).
Estetica, del Prof. M. PILO, di pag. XX-260 . . . . 1 50
— (Vedi *Etica — Filosofia — Logica — Psicologia*).
Estimo rurale, di F. CAREGA DI MURICCE, p. VI-164. 2 —
— (Vedi *Agronomia — Disegno topografico — Economia dei fabbricati rurali — Geometria pratica*).
Etica, del Prof. L. FRISO. (In lavoro).
— (Vedi *Filosofia*).
Etnografia, del Prof. B. MALFATTI, 2ª ediz., interamente rifusa, di pag. VI-200 . . . . 1 50
— (Vedi *Antropologia — Paleoetnologia*).
Etnologia. (Vedi *Antropologia*).
Fabbricati rurali. (Vedi *Economia dei*).
Fabbro. (Vedi *Operaio — Tornitore*).
Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, prepararli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. BELLUOMINI, pag. X-138, con 42 incisioni . . . . 2 —
Falsificazione degli alimenti. (Vedi *Adulterazione*).
Farmacista (Manuale del), del Dott. P. E. ALESSANDRI, di pag. XII-628, con 138 tav. e 80 incisioni originali. 6 50
Ferrovie. (Vedi *Trasporti*).

L. c.

Filatura. Manuale di filatura, tessitura e lavorazione meccanica delle fibre tessili, di E. GROTHE, traduzione sull'ultima edizione tedesca, di pag. VIII-414, con 105 incisioni . . . . 5 —
— (Vedi *Coltivazione — Piante industriali*).
Filologia classica, greca e latina, del Prof. V. INAMA, di pag. XII-195 . . . . 1 50
— (Vedi *Letteratura greca e romana*).
Filosofia morale, del Prof. L. FRISO, di pag. XVI-336 (vol. doppio) . . . . 3 —
— (Vedi *Estetica — Etica — Logica — Psicologia*).
Finanze (Vedi *Scienza delle*).
Fiori. (Vedi *Floricoltura — Piante e fiori*).
Fisica, del Prof. BALFOUR STEWART, trad. del Prof. G. CANTONI. 4ª ediz., di pag. X-188, con 48 incisioni . . 1 50
— (Vedi *Energia fisica*).
Fisiologia, di FOSTER, traduz. del Prof. G. ALBINI, 3ª ediz., di pag. XII-158, con 18 incisioni 1 50
Fisiologia comparata (Vedi *Anatomia*).
Flora italiana tascabile, del Prof. R. PIROTTA. (In lavoro).
Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli RODA, di pag. VIII-183, con 61 incisioni. . . . . 2 —
— (Vedi *Botanica — Piante e fiori*).
Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. BELLUOMINI, di pag. 146, con 41 incisioni . . . . . . 2 —
— (Vedi *Operaio*).
Fonologia greca, del Prof. A. CINQUINI. (In lavoro).
Fonologia italiana, del Dott. L. STOPPATO, p. VIII-102. 1 50
Fonologia latina, di S. CONSOLI, di pag. 208 . . . 1 50
Fotogalvanotipia. (Vedi *Arti grafiche*).
Fotografia dei colori, del Dott. C. BONACINI. (In lav.)
Fotografia pei dilettanti. (Come il sole dipinge), di G. MUFFONE, di pag. X-201, 2ª ediz., con molte incis. 2 —
— (Vedi *Arti grafiche — Dizionario fotografico — Ricettario fotografico*).
Frumento e mais, di G. CANTONI, di pag. VI-168 e 13 incisioni. . . . . 2 —
— (V. *Adulterazione — Alimentazione — Panificazione*).
Frutticoltura, del Prof. Dott. D. TAMARO, con 63 illustrazioni, di pag. VIII-192 . . . . 2 —
— (Vedi *Pomologia artificiale — Uva passa*).
Fulmini e parafulmini, del Dott. Prof. E. CANESTRINI, di pag. VIII-166, con 6 incisioni. . . . . . . 2 —
Funghi (I) ed i tartufi, loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura. Cenni di FOLCO BRUNI . . 2 —
Fuochi artificiali. (Vedi *Pirotecnia*).
Fuochista. (Vedi *Macchinista*).

L. c.

Galvanoplastica, ed altre applicazioni dell'elettrolisi, Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc., del Prof. R. FERRINI, 2ª ed., completamente rifatta, di pag. XII-392 con 45 incisioni. 4 —

Geodesia. (Vedi *Compensazione degli errori — Celerimensura — Geometria pratica — Telemetria*).

Geodinamica. (Vedi *Sismologia — Vulcanismo*).

Geografia, di G. GROVE, trad. del Prof. E. GALLETTI, 2ª ediz., riveduta, di pag. XII-160, con 26 incisioni. . 1 50

— (Vedi *Atlante — Cartografia — Disegno topografico — Dizionario geografico — Esercizi geografici — Prontuario di geografia*).

Geografia classica, di H. F. TOZER, traduzione e note del Prof. I. GENTILE, 5ª ediz., di pag. IV-168. . 1 50

Geografia fisica, di A. GEIKIE, traduzione sulla 6ª edizione inglese di A. STOPPANI, 3ª ediz., pag. IV-132, con 20 incisioni 1 50

Geologia, di GEIKIE, traduzione sulla 8ª edizione inglese di A. STOPPANI, 3ª edizione, di pag. VI-154, con 47 incisioni 1 50

— (Vedi *Cristallografia — Mineralogia*).

Geometria analitica dello spazio, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. VI-196, con 11 incisioni 1 50

Geometria analitica del piano, del Pr. F. ASCHIERI, di pag. VI-194, con 12 incisioni 1 50

Geometria descrittiva, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. IV-210, con 85 incisioni 1 50

Geometria metrica e trigonometria, del Prof. S. PINCHERLE, 3ª ediz., di pag. VI-152, con 16 incisioni. 1 50

Geometria pratica, dell'Ing. Prof. G. EREDE, 2ª ediz., riveduta, di pag. X-184, con 124 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Celerimensura — Disegno assonometrico — Disegno geometrico — Disegno topografico — Geodesia — Telemetria*).

Geometria projettiva, del Prof. F. ASCHIERI, di pagine VI-192, con 66 incisioni 1 50

Geometria pura elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 3ª ediz., di pag. VI-140, con 112 incisioni . . 1 50

Giardino (Il) infantile, del Prof. P. CONTI, di pagine IV-214, con 27 tavole (vol. doppio) . . . . . . 3 —

Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, di p. VIII-184. 1 50

Ginnastica femminile, di F. VALLETTI, di pag. VI-112, con 67 illustrazioni . . . . 2 —

Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di I. GELLI, di pag. VIII-108, con 216 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Scherma*).

L. c.

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di E. Boselli, di pag. 336, con 125 incisioni . . . 4 —
— (Vedi *Pietre preziose — Metalli preziosi*).

Giurisprudenza. (Vedi *Digesto — Diritto civile — Diritto romano — Diritto costituzionale — Diritto internazionale pubblico e privato — Diritto ecclesiastico — Diritto penale — Diritto amministrativo — Imposte dirette — Legge comunale — Mandato commerciale — Notaio — Ricchezza mobile — Testamenti — Legislazione rurale*).

Grafologia con numerosi autografi del Prof. C. Lombroso. (In lavoro).

Grammatica araldica. (Vedi *Araldica*).

Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), del Prof. E. Viterbo.
Vol. I. Galla-Italiano, di pag. VIII-152 . . . . . 2 50
Vol. II. Italiano-Galla, di pag. LXIV-106 . . . . . 2 50

Grammatica greca. (In lavoro).

Grammatica della lingua greca moderna, del Prof. R. Lovera, di pag. VI-154 . . . . 1 50

Grammatica italiana, del Prof. T. Concari, di pagine VII-201 . . . . 1 50

Grammatica latina, del Prof. Valmaggi, di p. X-250. 1 50
— (Vedi *Fonologia latina — Letteratura romana*).

Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del Prof. R. Lovera, di pag. VIII-200 . . . . . . 1 50

Grammatica sanscrita. (Vedi *Sanscrito*).

Grammatica tedesca, del Prof. L. Pavia, di pag. 1 50
— (V. *Esercizi di traduzione — Letteratura tedesca*).

Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare di Sir G. B. Airy, traduzione con note ed aggiunte del Prof. F. Porro, con 50 incisioni, di pag. XXIV-176 . . . . 1 50
— (Vedi *Astronomia — Spettroscopio*).

Grecia (La) antica, di G. Toniazzo. (V. *Storia antica*).

Idroterapia. (Vedi *Acque [cura delle]*).

Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. Bock, trad. di E. Parietti sulla 7ª ediz. ted. con una introduzione di G. Sormani, di pag. XII-273. 2 50

Igiene pubblica, del Prof. Sormani. (In lavoro).
— (Vedi *Assistenza agli infermi — Soccorsi d'urgenza*).

Igiene scolastica, di A. Repossi, 2ª ed., di pag. IV-246. 2 —

Igiene della vita pubblica e privata, del Dott. G. Faralli, di pag. XII-250 . . . . 2 50

Igiene veterinaria, del Dott. U. Barpi, di p. VIII-228. 2 —

Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, del Prof. P. Cantoni, di pag. XII-146, con 24 inc. e 7 tab. 1 50
— (Vedi *Climatologia — Meteorologia*).

L. c.

Illuminazione elettrica (Impianti di), dell'Ing. E. PIAZZOLI, 2ª edizione interamente rifatta, di pag. XIV-466, con 263 incisioni, 78 tabelle e 2 tav. litografate. 6 50
Imbalsamatore (Manuale dell'), preparatore tassidermista, di R. GESTRO, 2ª ediz. riveduta, di pag. XII-148, con 38 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Naturalista viaggiatore*).
Impianti elettrici. (V. *Elettricità* — *Illuminazione*).
Imposta sui redditi di ricchezza mobile, dell'Avvocato E. BRUNI, di pag. VIII-218. . . . . 1 50
Imposte dirette (Riscossione delle), dell'Avv. E. BRUNI, di pag. VIII-158 . . . . 1 50
Inchiostri. (Vedi *Vernici*).
Industria della seta, del Prof. L. GABBA, 2ª ediz., di pag. IV-208. . . . . 2 —
Industria (L') stearica. Manuale pratico dell'Ing. E. MARAZZA, di pag. 288, con 76 incisioni e con molte tabelle . . . . 5 —
Industrie. (Vedi *Apicoltura* — *Arte mineraria* — *Asfalto* — *Bachi da seta* — *Caseificio* — *Concia delle pelli* — *Galvanoplastica* — *Giojelleria* — *Merceologia* — *Olio* — *Orologeria* — *Piccole industrie* — *Tabacco* — *Tintore*, ecc.).
Industrie artistiche. (Vedi *Decorazione*).
Industrie tessili. (V. *Coltivazione* — *Filatura* — *Seta*).
Infezione, disinfezione e disinfettanti, del Dottor Prof. P. E. ALESSANDRI, di pag. VIII-190, con 7 incisioni. . . . . 2 —
Ingegnere civile. Manuale dell'Ingegnere civile e industriale, di G. COLOMBO, 13ª ed. (31°, 32° e 33° migliaio), di p. XIV-356, con 203 fig. e con una Bibliografia dell'Ingegnere disposta in ordine alfabetico delle materie di p. 148 5 50
Il medesimo tradotto in francese da P. MARCILLAC. 5 50
Ingegnere navale. Prontuario di A. CIGNONI, con 36 fig., di pag. XXXII-292. Leg. in tela L. 4 50, in pelle. 5 50
— (Vedi *Attrezzatura* — *Macchinista navale*).
Ingrassi. (Vedi *Chimica agraria* — *Concimazione*).
Insetti nocivi, di F. FRANCESCHINI, di pag. VIII-264, con 96 incisioni . . . . 2 —
Insetti utili, di F. FRANCESCHINI, di pag. XII-160, con 43 incisioni ed 1 tavola . . . . 2 —
Interesse e sconto, di E. GAGLIARDI, di pag. VI-204. 2 —
— (Vedi *Contabilità* — *Computisteria* — *Debito pubblico* — *Ragioneria* — *Valori pubblici*).
Istituzioni dello Stato (Le). (Vedi *Diritti e doveri dei cittadini* — *Ordinamento degli Stati*).
Ittiologia. (Vedi *Piscicoltura* — *Ostricoltura e Miticoltura*).

L. c.

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. SARTORI, di pag. x-162, con 24 inc. 2 —
— (Vedi *Adulterazione degli alimenti — Caseificio*).
Legge sulle caldaje. (Vedi *Macchinista e Fuochista*).
Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata dall'Avv. E. MAZZOCCOLO, 3ª ediz., con l'aggiunta di due regolamenti e due indici, di pag. XXII-648 . . 4 50
Leggi. (Vedi *Diritto amministrativo-civile-commerciale — Imposte dirette — Ordinamento degli stati — Ricchezza mobile*).
Legislazione rurale secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici dell'Avv. E. BRUNI. (In lavoro).
Legnami. (Vedi *Cubatura dei legnami — Falegname*).
Letteratura americana, di G. STRAFFORELLO, p. 158 1 50
Letteratura danese. (Vedi *Letteratura norvegiana*).
Letteratura ebraica, di A. REVEL, 2 vol., di pag. 364. 3 —
Letteratura egiziana, del Dott. L. BRIGIUTI. (In lav.).
Letteratura francese, del Prof. F. MARCILLAC, trad. di A. PAGANINI, 2ª ediz., di pag. VIII-184 . . . . . . 1 50
Letteratura greca, del Prof. V. INAMA, 9ª ediz., migliorata (dal 29° al 34° migliaio), di pag. VIII-234 . . 1 50
— (Vedi *Filologia classica — Verbi Greci Anomali*).
Letteratura indiana, del Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. VIII-159 . . . . 1 50
Letteratura inglese, del Prof. E. SOLAZZI, 3ª ediz., di pag. VIII-194 . . . . 1 50
Letteratura islandese, di S. AMBROSOLI. (In lavoro).
Letteratura italiana, di C. FENINI, 4ª edizione, di pag. VI-204 . . . . 1 50
Letteratura latina. (Vedi *Fonologia latina — Grammatica latina — Letteratura romana*).
Letteratura norvegiana del Dott. S. CONSOLI, di pag. XVI-272 . . . . 1 50
Letteratura persiana, del Prof. I. PIZZI, di pag. x-208. 1 50
Letteratura provenzale, A. RESTORI, di pag. x-220. 1 50
Letteratura romana, del Prof. F. RAMORINO, 3ª edizione, riveduta e corretta (dall' 8° al 12° migliaio), di pag. IV-320. . . . . 1 50
— (Vedi *Filologia classica — Grammatica latina*).
Letteratura spagnuola e portoghese, del Prof. L. CAPPELLETTI, di pag. VI-206 . . . . 1 50
Letteratura tedesca, del Prof. O. LANGE, traduz. di A. PAGANINI, 2ª ediz., corretta, di pag. XII-168. . 1 50
— (Vedi *Esercizi — Grammatica tedesca*).
Letterature slave, di D. CIÀMPOLI, 2 volumi:
I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, di pag. IV-144. 1 50
II. Russi, Polacchi, Boemi, di pag. IV-142 . . . . 1 50
Letteratura ungherese, di ZIGÀNY ARPÀD, di pagine XII-295 . . . . 1 50

L. c.

Lingua araba. (Vedi *Arabo volgare*).
Lingua dei Celti (ceramenica). (Vedi *Grammatica*).
Lingua greca. (Vedi *Grammatica — Letteratura*).
Lingua greca moderna. (Vedi *Grammatica*).
Lingua latina. (Vedi *Grammatica — Letteratura romana*).
Lingua rumena. (Vedi *Grammatica*).
Lingua sanscrita. (Vedi *Sanscrito*).
Lingua tedesca. (Vedi *Esercizi — Grammatica — Letteratura*).
Lingua tigrè. (Vedi *Tigrè*).
Lingue diverse. (V. *Letteratura delle singole lingue*).
Lingue dell'Africa, di R. CUST, versione italiana del Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-110. . . . 1 50
Lingue neo-latine, del Dott. E. GORRA. (In lavoro).
Lingue straniere (Studio delle), di MARCEL, ossia l'Arte di pensare in una lingua straniera, traduz. del Prof. DAMIANI, di pag. XVI-136 . . . . 1 50
Livree. (Vedi *Araldica*).
Logaritmi (Tavole di), con 5 decimali, pubblicate per cura di O. MÜLLER, 3ª ediz., di pag. XX-142 . . . . 1 50
Logica, di W. STANLEY JEVONS, traduz. del Prof. C. CANTONI. 4ª ediz., di pag. VIII-154, e 15 incisioni . . 1 50
— (Vedi *Estetica — Etica — Filosofia — Psicologia*).
Logismografia, dell'Ing. C. CHIESA, 3ª ediz., di pagine XIV-172 . . . . 1 50
— (Vedi *Computisteria — Ragioneria*).
Luce e colori, del Prof. G. BELLOTTI, di pag. X-156, con 24 incisioni e 1 tavola. 1 50
Macchinista e fuochista, del Prof. G. GAUTERO, 6ª edizione, con aggiunte dell'Ing. L. LORIA, di pagine XIV-180, con 24 incisioni e col testo della Legge sulle caldaie, ecc. (dal 10° al 12° migliaio). . . . . . 2 —
Macchinista navale (Manuale del) di M. LIGNAROLO, di pag. XII-401, con 161 figure 5 50
Macchine agricole, del conte A. CENCELLI-PERTI, di pag. VIII-216, con 68 incisioni . . . . 2 —
Macchine. (Vedi *Ingegnere civile — Ingegnere navale — Meccanismi (500) — Meccanica — Orologeria*).
Magnetismo ed elettricità, del Dott. G. POLONI, di pag. XII-204, con 102 incisioni 2 50
Mais. (V. *Agricoltura — Frumento — Panificazione*).
Malattie ed alterazioni dei vini, del Prof. S. CETTOLINI, di pag. XI-138 con 138 con 13 incisioni . . . 2 —
Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del Dottor R. WOLF, compilazione del Dott. W. ZOPF, traduzione con note ed aggiunte del Dott. P. BACCARINI, di pag. X-268, con 50 incisioni. 2 —

L. c.

Mandato commerciale, del Prof. E. VIDARI, di pagine VI-160 . . . . 1 50
Mare (Il), del Prof. V. BELLIO, di pag. IV-140, con 6 tavole litografate a colori 1 50
Marina (Manuale del) **militare e mercantile**, di DE AMEZAGA, con 18 xilografie ed un elenco del personale dello Stato maggiore, di pag. VIII-264. . . . 5 —
Mastici. (Vedi *Vernici e lacche*).
Materiali da costruzione (Vedi *Resistenza dei — Travi metallici composti*).
Matematica. (Vedi *Algebra — Aritmetica — Celerimensura — Compensazione — Equazioni — Geometria — Logaritmi*).
Materie coloranti. (Vedi *Colori e Vernici — Tintore — Piante industriali — Vernici e Lacche*).
Meccanica, del Prof. R. STAWELL BALL, traduz. del Prof. J. BENETTI, 3ª ediz., di pag. XVI-214, con 89 inc. 1 50
Meccanismi (500), scelti fra i più importanti e recenti riferentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pneumatica, macchine a vapore, molini, torchi, orologerie ed altre diverse macchine, da H. T. BROWN, traduz. italiana sulla 16ª ediz. inglese, dall'Ing. F. CERRUTI, di pag. VI-176, con 500 incisioni nel testo 2 50
— (Vedi *Orologeria — Tornitore meccanico*).
Medaglie. (Vedi *Numismatica*).
Medicina. (Vedi *Igiene — Farmacista — Soccorsi d'urgenza*).
Merceologia, del Prof. O. LUXARDO. (In lavoro).
Metalli. (Vedi *Peso dei metalli — Operaio — Fonditore — Tornitore*).
Metalli preziosi (oro, argento, platino. estrazione, fusione, assaggi, usi), di G. GORINI, 2ª ediz., di pag. 196, con 9 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Oreficeria e Gioielleria*).
Meteorologia generale, del Dott. L. DE MARCHI, di pag. VI-156, con 8 tavole colorate 1 50
— (Vedi *Climatologia — Igroscopi — Sismologia*).
Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, tradotta dal Dott. V. LAMI, di pag. XVIII-130 . . . 1 50
— (Vedi *Letteratura greca — Ritmica — Verbi greci*).
Metrologia. (Vedi *Prototipi internazionali del metro e del kilogramma*).
Microscopio (Il), ossia Guida elementare alle più facili osservazioni di Microscopia, del Prof. CAMILLO ACQUA, di pag. XII-226, con 81 incisioni. 1 50
— (Vedi *Batteriologia — Protistologia*).
Miele. (Vedi *Apicoltura*).
Militaria. (Vedi *Cavallo — Scherma — Storia arte militare*).

L. c.

Mineralogia generale, del Prof. L. Bombicci, 2ª ed. riveduta, di pag. xiv-190, con 183 inc. e 3 tav. crom. 1 50

Mineralogia descrittiva, del Prof. L. Bombicci, 2ª ediz. di pag. iv-300, con 119 incisioni (vol. doppio). . 3 —

— (Vedi *Cristallografia*).

Miniere. (Vedi *Arte mineraria*).

Miniatura. (Vedi *Colori e vernici* — *Luce e colori* — *Decorazione e ornamentazione* — *Pittura*).

Miti. (Vedi *Errori e pregiudizi*).

Mitilicoltura. (Vedi *Ostricoltura* — *Piscicoltura*).

Mitologia comparata, di A. De Gubernatis, 2ª ediz., di pag. viii-150 . . . . 1 50

Mitologia greca, di Foresti. Vol. I, *Divinità*, p. viii-264 1 50
Vol. II, *Eroi*. 1 50

Mitologia romana, di A. Foresti. (In lavoro).

Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte. Prontuario ad uso degli ingegneri, architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura, di E. Schenck, di pag. xl-188. . . . 3 50

— (Vedi *Peso dei metalli* — *Resistenza dei materiali*).

Monete. (Vedi *Numismatica* — *Tecnologia e Terminologia monetaria*).

Morale. (Vedi *Filosofia morale*).

Musica (Storia della), del Dr. A. Untersteiner, di pagine 300 (vol. doppio). . . . . 3 —

— (Vedi *Armonia* — *Cantante* — *Pianista* — *Strumentazione* — *Strumenti ad arco* ecc.).

Naturalista viaggiatore, di A. Issel e R. Gestro (Zoologia), di pag. viii-144, con 38 incisioni . . . . 2 —

— (Vedi *Imbalsamatore*).

Nautica. (Vedi *Attrezzatura* — *Ingegnere navale* — *Macchinista navale* — *Marino*).

Notaro (Manuale del), aggiuntevi le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, le norme ed i moduli pel Debito pubblico, del Notaio Avv. A. Garetti, 2ª ediz., rifusa e notevolmente ampliata, di pag. xii-310 . . . . . 3 50

— (Vedi *Testamenti*).

Numismatica, del Dott. S. Ambrosoli, di pag. xvi-216, con 100 fotoincisioni nel testo e 4 tavole 1 50

— (Vedi *Araldica* — *Archeologia* — *Paleografia*).

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni, di G. Gorini, di pag. viii-214, con 7 incis., 2ª ediz., completamente rifatta dal Dott. G. Fabris . . . . 2 —

— (Vedi *Saponi*).

Olivo ed olio, *Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio*, del Prof. A. Aloi, 3ª ediz., di pag. xii-330, con 41 incisioni . . . . . 3 —

C. ·ro, di W. Gladstone, traduz. di R. Palumbo e C. ·rilli, di pag. xii-196 . . . . 1 50

L. c.

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti, aggiustatori e meccanici, di G. BELLUOMINI, 3ª edizione, di pag. XVI-216. 2 —
— (Vedi *Falegname — Fonditore — Paga degli operai — Tornitore*).
Operazioni doganali. (Vedi *Trasporti*).
Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, del Dott. F. RACIOPPI, di pag. VIII-310 (vol. doppio) . . 3 —
Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, del Dott. F. RACIOPPI, di pag. VIII-376 (vol. doppio). 3 —
Oreficeria e gioielleria, oro, argento e platino, di E. BOSELLI, di pag. 336, con 125 incisioni . . . . 4 —
— (Vedi *Metalli preziosi — Pietre preziose*).
Oriente antico (L'), di I. GENTILE. (V. *Storia antica*).
Ornamento. (Vedi *Decorazioni — Disegno — Pittura — Scoltura*).
Orologeria moderna, dell'Ing. GARUFFA, con 187 illustrazioni, di pag. VIII-302, con 276 incisioni . . . 5 —
Orticoltura, del Prof. D. TAMARO, con 60 incisioni. 4 —
— (Vedi *Agricoltura*).
Ostricoltura e mitilicoltura, del Dott. D. CARAZZI, con 13 fototipie, di pag. VIII-202 . . . . 2 50
Ovicoltura. (Vedi *Bestiame*).
Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a lire cinque,** di C. NEGRIN, di pag. 200.
Paleoetnologia, di I. REGAZZONI, p. XI-252, con 10 inc. 1 50
Paleografia, di E. M. THOMPSON, traduz. dall'inglese, con aggiunte e note di G. FUMAGALLI, di pag. VIII-156, con 21 incisioni nel testo e 2 tavole in fototipia . . 2 —
Panificazione razionale, di POMPILIO, di pag. IV-126. 2 —
Parafulmini. (Vedi *Fulmini*).
Parassitologia. (Vedi *Animali parassiti*).
Pedagogia. (Vedi *Giardino infantile — Ginnastica femminile — Ginnastica maschile — Igiene scolastica*).
Pelli. (Vedi *Concia delle pelli*).
Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. BELLUOMINI, di pag. XXIV-248 . . . 3 50
— (V. *Fonditore — Ingegnere civile — Ingegnere navale — Momenti resistenti — Operaio — Resistenza*).
Pianista (Manuale del), di L. MASTRIGLI, di p. XVI-112. 2 —
Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie e varietà, di A. PUCCI, di pag. VIII-198 con 116 incisioni. 2 50
— (Vedi *Botanica — Floricoltura — Frutticoltura*).
Piante industriali, coltivazione, raccolto e preparazione, di G. GORINI, nuova edizione, di pag. II-144. 2 —

L. c.

Piante tessili. (Vedi *Coltivazione ed industrie delle*).
Piccole industrie, del Prof. A. Errera, di p. xvi-186. 2 —
Pietre preziose, classificazione, valore, arte del giojelliere, di G. Gorini. 2ª ed., di pag. 138, con 12 inc. 2 —
— (Vedi *Oreficeria — Giojelleria*).
Pirotecnica moderna, di F. Di Maio, con 111 incisioni, di pag. viii-150. . . . . 2 50
Piscicoltura, del Dott. E. Bettoni. (In lavoro).
— (Vedi *Ostricoltura*).
Pittura. Pittura italiana antica e moderna, del Prof. A. Melani, 2 vol., di pag. xx-164 e xxvi-202, illustrati con 102 tav., di cui una cromolit. e 11 figure nel testo. 6 —
— (Vedi *Anatomia pittorica — Colori (scienza dei) — Colori e vernici — Decorazione — Luce e colori*).
Poesia. (Vedi *Dante — Omero — Rettorica — Ritmica — Stilistica*).
Pollicoltura, del March. G. Trevisani, con 70 illustrazioni, di pag. xvi-176 . . . . 2 50
— (Vedi *Animali da cortile — Colombi*).
Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, del Prof. M. Del Lupo, p. vi-132, con 44 inc. 2 —
— (Vedi *Frutticoltura*).
Prato (Il), del Prof. G. Cantoni, di pag. 146, con 13 inc. 2 —
Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresi i passi alla Valtellina, con prefazione di Stoppani, 2ª ediz., di pag. xx-124, con carta topografica e panorama delle Alpi Orobiche . . . . 3 —
— (Vedi *Alpi — Dizionario alpino*).
Pregiudizi. (Vedi *Errori e pregiudizi*).
Profumeria, dell'Ing. E. Marazza. (In lavoro).
— (Vedi *Saponeria*).
Prontuario di geografia e statistica, di G. Garollo, pag. 62 . . . . 1 —
— (Vedi *Atlante Universale — Atlante d'Italia — Dizionario geografico*).
Prontuario per le paghe. (Vedi *Paghe*).
Protistologia, di L. Maggi, 2ª ediz., di pag. xvi-278, con 93 incisioni nel testo (volume doppio). . . . . 3 —
— (Vedi *Batteriologia — Microscopio*).
Prototipi (I) internazionali del metro e del kilogramma ed il codice metrico internazionale, di A. Tacchini. (In lav.)
Proverbi in quattro lingue. (V. *Dottrina popolare*).
Psicologia, del Prof. C. Cantoni, di pag. iv-158 . . 1 50
Ragioneria, del Prof. V. Gitti, 2ª ediz., di pag. vi-132. 1 50
— (V. *Computisteria — Contabilità — Logismografia*).
Reclami ferroviari. (Vedi *Trasporti*).
Religione e lingue dell'India inglese, di R. Cust, trad. dal Prof. A. De Gubernatis, di pag. iv-124 . 1 50
— (Vedi *Letteratura indiana*).

L. c.

Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, dell'Ing. GALLIZIA, p. x-336, 236 inc. e 2 tav. 5 50
— (Vedi *Peso dei metalli* — *Travi metallici*).
Retterica, ad uso delle Scuole, di F. CAPELLO, p. VI-122. 1 50
— (Vedi *Arte del dire* — *Ritmica* — *Stilistica*).
Ricchezza mobile (Imposta sui redditi di), dell'Avvocato E. BRUNI, di pag. VIII-218 . . . . 1 50
— (Vedi *Imposte dirette*).
Ricettario fotografico, Dott. LUIGI SASSI, di p. VI-150 2 —
Riscaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, del Prof. R. FERRINI, 2 vol., di pag. x-332, 94 incis. 4 —
Riscossione d'imposte. (Vedi *Imposte dirette*).
Risorgimento italiano (Storia del), del Prof. F. BERTOLINI, di pag. VI-154 . . . . 1 50
— (Vedi *Storia e cronologia* — *Storia italiana*).
Ristauratore dei dipinti, del Conte G. SECCO-SUARDO, 2 vol., con molte incisioni. (In lavoro).
Ritmica e metrica razionale italiana, del Professore Rocco MURARI, di pag. XVI-216. . . . . . 1 50
— (Vedi *Arte del dire* — *Rettorica* — *Stilistica*).
Sanscrito (Avviamento allo studio del), di F. G. FUMI, 2ª ediz., rifatta, di pag. XII-254 (vol. doppio) . . . . 3 —
— (Vedi *Storia comparata delle lingue classiche*, ecc.).
Saponeria, dell'Ing. E. MARAZZA. (In lavoro).
— (Vedi *Profumeria*).
Scacchi (Manuale pel giuoco degli), di A. SEGHIERI, di pag. XV-222, con 191 illustrazioni 2 50
Scherma italiana (Manuale di), su i principii ideati da Ferdinando Masiello, di I. GELLI, p. VIII-194, con 66 tav. 2 50
Scienza delle finanze, di T. CARNEVALI, pag. IV-140. 1 50
Scienze naturali. (Vedi *Anatomia comparata* — *Antropologia* — *Arte mineraria* — *Batteriologia* — *Bestiame* — *Botanica* — *Chimica* — *Chimica agraria* — *Cristallografia* — *Fisiologia* — *Flora italiana* — *Funghi e Tartufi* — *Geologia* — *Insetti* — *Microscopia* — *Mineralogia* — *Naturalista* — *Ostricoltura* — *Piscicoltura* — *Pomologia* — *Protistologia* — *Zoologia*).
Scoltura. Scoltura italiana antica e moderna, statuaria e ornamentale dell' Archit. Prof. A. MELANI, di pagine XVIII-196, con 56 tav. e 26 fig. intercalate nel testo. 4 —
Scoltura in legno. (Vedi *Decorazione e industrie artistiche* — *Falegname*).
Scritture d'affari (Precetti ed esempi di), per uso delle Scuole tecniche, popolari e commerciali, del Professor D. MAFFIOLI, di pag. VIII-203. . . . . 1 50
Selvicoltura, di A. SANTILLI, pag. VIII-220 e 46 inc. 2 —
Seta. (Vedi *Industria della seta* — *Bachi da seta* — *Tintura della seta*).

L. c.

Shakspeare, di DOWDEN, trad. di BALZANI. (In lav.). 1 50
Siderurgia (Manuale di), dell' Ing. V. ZOPPETTI, con molte illustrazioni. (In lavoro).
Sismologia, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50
— (Vedi *Climatologia* — *Meteorologia* — *Vulcanismo*).
Soccorsi d' urgenza, del Dott. C. CALLIANO, di pagine XVI-276, con 6 tavole litografate, 2ª edizione . . 3 —
Socialismo. (In lavoro).
Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni**, di R. A. PROCTOR, traduz. con note ed aggiunte di F. PORRO, di pag. VI-178, con 71 incisioni e una carta di spettri. 1 50
— (Vedi *Astronomia* — *Gravitazioni*).
Spirito di vino. (Vedi *Cognac*)
Sport. (V. *Cacciatore* - *Ciclista* - *Ginnastica* - *Scherma*).
Statistica, di F. VIRGILII, di pag. VIII-176 . . . . 1 50
— (Vedi *Prontuario di geografia e statistica*).
Stearineria. (Vedi *Industria stearica*).
Stemmi. (Vedi *Araldica*).
Stenografia, di G. GIORGETTI e M. TESSAROLI (secondo il sistema Gabelsberger-Noe), di pag. 200. . . 2 —
Stilistica, ad uso delle Scuole, del Prof. F. CAPELLO, di pag. XII-164 . . . . 1 50
— (Vedi *Arte del dire* — *Rettorica* — *Ritmica*.
Storia antica (Elementi di). Vol. I. *L'Oriente Antico*, prospetto storico, di I. GENTILE, di pag. XII-232 . . 1 50
Vol. II. *La Grecia*, di G. TONIAZZO, di pag. VI-216. 1 50
Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tav. sinottiche, di V. CASAGRANDI, di pag. XVIII-204. 1 50
Storia dell'arte militare antica e moderna, di V. ROSSETTO, con 17 tavole illustrative, di pag. VIII-504. 5 50
Storia della ginnastica. (Vedi *Ginnastica*).
Storia italiana (Manuale di), di C. CANTÙ, di p. IV-160. 1 50
— (Vedi *Risorgimento* — *Storia e cronologia*).
Storia della musica, del Dott. A. UNTERSTEINER, di pag. 300 (vol. doppio). . . . . 3 —
Storia naturale. (Vedi *Scienze naturali*).
Strumentazione (Manuale di), di E. PROUT, trad. ital. con note di V. RICCI, con 95 esempi, di pag. X-222. 2 50
— (Vedi *Armonia* — *Cantante* — *Pianista*).
Strumenti ad arco (Gli) **e la musica da camera**, del Duca di CAFFARELLI. (In lavoro).
Tabacco, del Prof. G. CANTONI, di p. IV-176, con 6 inc. 2 —
Tacheometria. (Vedi *Celerimensura*).
Taglio e confezione di biancheria. (V. *Disegno*).
Tariffe ferroviarie. (Vedi *Trasporti*).
Tartufi e funghi. (Vedi *Funghi*).
Tasse di registro, bollo, ecc. (Vedi *Notaro*).
Tavole logaritmiche. (Vedi *Logaritmi*).

L. c.

Tavole tacheometriche. (Vedi *Celerimensura*).

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pag. XIV-192 . . . . 2 —

Telefono. di D. V. PICCOLI, di pag. IV-120, con 38 inc. 2 —

Telegrafia, di R. FERRINI, di pag. VI-318, con 95 inc. 2 —

Telemetria, misura delle distanze in guerra, di G. BERTELLI, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie . 2 —

— (Vedi *Celerimensura — Compensazioni errori — Disegno topografico*).

Termodinamica, di C. CATTANEO, di p. X-196, con 4 fig. 1 50

— (Vedi *Dinamica*).

Terremoti. (Vedi *Sismologia*).

Tessitura. (Vedi *Filatura*).

Testamenti (Manuale dei), per cura del Dott. L. SERINA, di pag. VI-238 . . . . 2 50

Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. MANFREDO CAMPERIO, di pag. 180 . . . . 2 50

— (V. *Arabo volgare — Grammatica galla — Lingue dell'Africa*).

Tintore (Manuale del), di R. LEPETIT, 3ª ediz., di pagine X-279, con 14 incisioni (vol. doppio) . . . . . 4 —

Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pag. XVI-432 . . . . 5 —

Tipografia. I. — Guida per chi stampa e fa stampare. — Compositori e Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pag. 280 . . . . 2 50

Topografia. (V. *Cartografia - Celerimensura - Compensazione errori - Disegno topografico - Telemetria*).

Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, con illustrazioni. (In lavoro).

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. DINARO, di pag. 164. . . . . . 2 —

— (Vedi *Meccanica — Meccanismi — Operaio*).

Trigonometria. (Vedi *Geometria metrica*).

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe e disposizioni vigenti, per A. G. BIANCHI, con una carta delle reti ferroviarie italiane, di pag. XVI-152. 2 —

Travi metallici composti (Momenti resistenti, pesi dei), E. SCHENCK, pag. XL-188, 10 fig. e tabella per chiodatura 3 50

— (Vedi *Peso dei metalli — Resistenza dei materiali*).

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, dell'Ing. G. BERTOLINI, di p. X-124-14. 2 50

L. c.

Uva passa (Industria dell') **e della essicazione delle frutta e degli ortaggi**, Prof. L. Paparelli. (In lav.).
Valli Lombarde, di Scolaro. (Vedi *Dizion. alpino*).
Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei) e per le operaz. di Borsa, Dott. F. Piccinelli, p. xiv-236. 2 50
Velocipedismo, di A. Galante. (Vedi *Ciclista*).
Ventilazione. (Vedi *Riscaldamento*).
Verbi greci anomali (I), di P. Spagnotti, secondo le Grammatiche di Curtius e Inama, di pag. xxiv-107. 1 50
Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche e prodotti affini (Fabbricazione delle), dell'Ing. Ugo Fornari, di pag. viii-262 . . . . . 2 —
— (Vedi *Colori e Vernici*).
Veterinaria. (Vedi *Bestiame* — *Igiene veterinaria*).
Viaggi. (Vedi *Naturalista viaggiatore*).
Vinacce (Fabbricazione delle). (Vedi *Cognac*).
Vino (Il), di Grazzi-Soncini, di pag. xvi-152 . . . . 2 —
Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. Ottavi, rived. ed ampliata da A. Strucchi, 3ª ediz., di pag. viii-184 e 22 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Analisi del vino* — *Cantiniere* — *Enologia* *Malattie dei vini*).
Vocabolario (Nuovo) **della lingua italiana**, di A. Straccali e L. Gentile. Vol. di circa 1400 p. (In lav.).
Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. Mattei, secondo i principii dell'inventore M. Schleyer, ed a norma del *Dizionario Volapük* ad uso dei francesi, del Prof. A. Kerckhoffs, di pag. xxx-198. 2 50
— (Dizionario volapük-italiano), del Prof. C. Mattei, di pag. xx-204 . . . . 2 50
— Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. Rosa Tommasi e A. Zambelli, di pag. 152 . . . . 2 50
Vulcanismo, del Capitano L. Gatta, di pag. viii-268, con 28 incisioni 1 50
— (Vedi *Sismologia* — *Meteorologia* — *Igroscopi* — *Climatologia*).
Zincotipia. (Vedi *Arti grafiche*).
Zoologia, Proff. E. H. Giglioli e G. Cavanna, 3 vol.:
I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure . . . 1 50
II. Vertebrati. Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. xvi-156, con 33 incisioni. . 1 50
III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), p. xvi-200 con 22 inc. 1 50
— (Vedi *Batteriologia* — *Imbalsamatore* — *Naturalista viaggiatore* — *Protistologia*).
Zootecnia, del Prof. Tampolini. (In lavoro).

Indice alfabetico degli Autori.

LIBRERIA ITALIANA ED ESTERA

(Esportazione e Importazione)

La *LIBRERIA HOEPLI* è una delle più fornite d'Italia. Non v'è pubblicazione di qualsiasi genere la quale venga alla luce, da noi, e nei paesi forestieri, che essa non riceva subito e prontamente non metta in commercio. La rete dei suoi rapporti è così estesa che certamente nessuna altra libreria può vantare l'uguale. La *LIBRERIA HOEPLI* ha aperto comunicazioni dirette con qualunque Casa editrice sia d'Europa sia d'America, e riceve, senza bisogno di intermediari, qualunque opera che venga pubblicata. Inutile aggiungere che tiene sempre un vasto assortimento di **novità,** onde il servizio che la *LIBRERIA HOEPLI* può fare anche in questo ramo delle sue estesissime comunicazioni col pubblico, è dei più completi e dei più pronti. La vastità dei suoi rapporti la mettono in grado altresì, di fare **le più grandi facilitazioni d'acquisto** a quanti le si rivolgono direttamente a **Milano,** per la compera dei volumi staccati o di serie di volumi, o, eziandio, di biblioteche speciali su qualsivoglia ramo dello scibile.

La Libreria Hoepli ha ordinato un servizio speciale di esportazione, col quale eseguisce con assoluta rapidità ed esattezza le ordinazioni dei signori Clienti, e cura infinitamente questa parte del suo vasto movimento librario, sì che non le manca mai nessuna opera, pubblicata in Italia, che interessi o molto o poco i paesi forestieri.

Ai proprii Clienti manda, per esame, le opere desiderate: e accetta abbonamenti a tutti i periodici scientifici e letterari stranieri.
